

1. Введение

Ни для кого не секрет, что человек всегда стремится получить максимальную выгоду от своих действий. А что является самой выгодной наградой в современных реалиях? Конечно же, деньги. Люди открывают свои предприятия, налаживают торговые отношения – стараются приумножить свой капитал. Однако если начать свой бизнес неподготовленным, то с большей вероятностью, вы никоим образом не пополните свой бюджет, а даже наоборот – потеряете часть денег. Так что же делать, чтобы не упасть в грязь лицом и получить желанную выгоду? Что бы ответить на этот вопрос обратимся к математической экономике.

2. Теоретическая часть

Экономика – наука, изучающая распределение, накопление, производство и обмен материальных благ в системе хозяйственной деятельности человека. Для того чтобы рассмотреть те или иные экономические процессы или явления используют экономическую модель. Именно она позволяет максимально точно оценить свои возможности, анализировать проделанную работу. Прежде чем создать экономическую модель стоит разделить все используемые переменные на два типа: эндогенные и экзогенные. Эндогенные переменные – это величины, которые непосредственно участвуют в нашей модели, являются объектом изучения (например: стоимость товаров). Экзогенные переменные, в свою очередь, отвечают за величины, которые воздействуют на исследуемые величины, но не являются объектом изучения (например: наличие ресурсов). Однако некоторые переменные могут быть, как и эндогенными, так и экзогенными. Это зависит от характера поставленной задачи.

Существуют разные способы создания экономической модели. В данной же работе, создавая экономические модели, я буду ссылаться к такой науке, как математика. Математическая экономика – это прикладная наука, предметом исследований которой является математическое описание и моделирование экономических объектов и явлений. Сейчас мы рассмотрим примеры математического моделирования в области экономики на примерах дифференциального исчисления и теории общего равновесия.

3. История применения дифференциального исчисления в экономике

Впервые воспользоваться дифференциальными уравнениями при построении финансовой модели решился французский математик Луи Башелье. Его диссертация "Теория спекуляции", опубликованная в 1900 году, в которой

обсуждалось использование Броуновского движения, стала первой работой, где высшая математика помогает в изучении финансов. Дифференциальные уравнения же ученый использовал, пытаясь объяснить ценообразование опционов.

Позже в работах экономистов стало появляться Уравнение Эйлера. Так в 1928 году английский математик и экономист Фрэнк Рамсей использовал это уравнения для своей модели роста. В последующих работах математиков-экономистов оно также отыгрывало не малую роль

В 1937 году венгеро-американский математик Джон фон Нейман построил «Модель общего равновесия». Именно в эту модель молодой ученый впервые включил ограничения в виде неравенств. Можно сказать, что это работа стала прообразом Теории Игр – будущего труда Д. Неймана.

Следующим шагом в математической экономике стало создание метода линейного и нелинейного программирования. Оба метода использовались для оптимизации распределения производства между фирмами. Но в отличие от линейного программирования, нелинейное рассматривало варианты, когда искомый оптимум находится не на границе области, определенной ограничениями, и использовал для решения метод неопределенных множителей Лагранжа.

В 1944 году Джон фон Нейман и Оскар Моргенштерн совершают прорыв, представив общественности свою книгу «Теория игр и экономическое поведение». В ней впервые была изложена новейшая теория, представляющий собой некий конфликт интересов, где каждая из «играющих» сторон должна была максимизировать свой выигрыш. Теория избегает дифференцирования, потому что некоторые функции в книге просто недифференцируемые. Однако в экономической динамике и дифференциальные уравнения и Теория Игр используются одновременно. Теория Игр ознаменовала новую веху развития мировой экономики.

4. Применения дифференциальных уравнений и Теории игр для построения экономической модели

4.1 Динамическая модель общего равновесия

Рассмотрим динамическую модель общего равновесия для закрытой экономики. Эта базовая модель объясняет, каким именно образом происходит оптимальный выпуск продукции, и как он распределяется между потреблением и накоплением капитала. Модель описывается таким образом: сегодняшний выпуск продукции может быть либо потреблен, либо инвестирован, а

существующий запас капитала – либо потреблен сегодня, либо использован для производства в дальнейшем. Основная цель модели показать, как наилучшим образом распределить выпуск между потреблением и инвестициями, чтобы завтра увеличить выпуск и потребление. Модель состоит из трех уравнений. Первое представляет собой тождество национального дохода:

$$y_t = c_t + i_t$$

Здесь совокупный выпуск продукции y_t в периоде t состоит из потребления c_t и средств производства i_t . В данной простой модели выпуск является также и доходом, поэтому он либо расходуется на потребление, либо сохраняется на сбережения для дальнейших инвестиций. Сбережения (s_t) можно потратить только на дальнейшие средства производства. Из этого следует, что $s_t = i_t$ и $s_t = y_t - c_t$.

Второе уравнение имеет вид:

$$\Delta k_{t+1} = i_t - bk_t$$

Здесь запас капитала в начале периода t (k_t) постепенно накапливается со временем. Увеличение запаса капитала (чистых инвестиций) за определенный период равно инвестициям за вычетом амортизации капитала (списывание части стоимости объекта основного капитала). Постоянная часть капитала b выходит из употребления (амортизируется) в каждом периоде. Это обеспечивает внутреннюю динамику модели.

Третье уравнение представляет собой производственную функцию:

$$y_t = F(k_t)$$

Это уравнение показывает, что выпуск продукции зависит от капитала на начало периода. Так же из этого следует, что рост запаса капитала увеличивает выпуск, но снижает время выпуска продукции (Δk_{t+1}).

Объединив все три уравнения, получим следующее уравнение с двумя переменными:

$$F(k_t) = c_t + \Delta k_{t+1} + bk_t$$

При заданном первоначальном запасе капитала нужно определить предпочитаемые уровни потребления в первый период (c_t) и капитал на начало периода $t+1$ (Δk_{t+1}). Стоит учитывать, что в этой простой модели, пока что исключены всевозможные инвестиции. Итак, дальше нужно определить, что мы хотим максимизировать. Наиболее оптимальным решением выглядит

максимизация потребления или же полезности, получаемой от потребления. Теперь, для дальнейшего исследования обратимся к Теории игр.

4.2 Теория игр

Теория Игр – раздел прикладной математики, направленный на изучение оптимальных решений конфликтов между игроками (конфликтующими сторонами) и подбором наилучшей стратегии ведения конфликта. Само понятие игры – это некий свод правил, установленный игроками заранее. В экономике это, соответственно, экономическая теория. Игры бывают кооперативными и некооперативными. В кооперативных играх допускается свободный обмен информацией между игроками, а в некооперативных игроки не могут сотрудничать друг с другом. Нужную информацию в таком случае участники получают от личных наблюдений, исследований. Теперь посмотрим, как Теория игр поможет нам в динамической модели общего равновесия, если учесть, что наша главная цель – достижение максимизации потребления.

4.3 Теория игр в динамической модели общего равновесия

Вернемся к нашему уравнению: $F(k_t) = c_t + \Delta k_{t+1} + bk_t$. Что бы увеличить максимизацию полезности, нужно максимизировать потребление в каждом периоде, а не только на отрезке времени t . Так как в ином случае решение нашего конфликта будет не оптимальным. Дело в том, что если максимизировать потребление в конкретный момент t , то придется потратить весь капитал и весь текущий выпуск. Вследствие чего, у нас не останется средств для дальнейшего производства. Поэтому рассмотрим наше уравнение в долгосрочной перспективе, где мы всегда будем иметь капитал для дальнейших вложений. Получим:

$$c_t = F(k_t) - bk_t$$

Теперь вопрос другой: как выбрать k , максимизирующее c , какой должен быть капитал, чтобы получить максимальный выгодный выпуск для потребления. Рассмотрим условие первого порядка:

$$\partial c / \partial k = F'(k) - b = 0$$

И второго порядка:

$$\partial^2 c / \partial k^2 = F''(k) \leq 0$$

Первое уравнение означает, что запас капитала должен увеличиваться до тех пор, пока его предельный продукт ($F'(k)$) не будет равен норме амортизации b . Вплоть до этой точки рост запаса капитала увеличивает потребление, но после

этой точки потребление начинает снижаться. Это происходит, потому что расходование выпуска на замещение изношенного капитала в каждом периоде требует сокращения потребления.

Рассмотрим рис. 1.1. Здесь показано, что предельный продукт капитала снижается с ростом запаса капитала. Максимальная величина запаса капитала определяется заданной нормой амортизации b . Чем выше норма амортизации, тем ниже устойчивая величина запаса капитала.

Оптимальный уровень потребления можно определить разными графическими способами. Я покажу способ, который сам разработал. Для этого вновь обратимся к Теории Игр и рассмотрим такое понятие как шкала напряжения.

Шкала напряжения – некая функция, которая ограничивает нас в подборе решения. Т.е. если какое-то действие заполнит шкалу на максимум, то это будет означать проигрыш, неудачу. Однако если шкала достигнет минимума, то это тоже будет считаться проигрышем. Ведь в таком случае мы пожертвуем собственными интересами, а это никак нельзя считать оптимальной стратегией, верным решением задачи. Представим шкалу, как функцию $S(z, g(z))$, где z – текущий ход (текущий момент решения поставленной задачи), а $g(z)$ – вся известная информация игрока на момент этого хода z .

Для шкалы напряжения всегда будут выполняться следующие два условия:

$S(z, g(z)) = E(z, g(z))$, где функция $E(z, g(z))$ – это оптимальная стратегия игрока (решение поставленной задачи).

$-1 < S(z, g(z)) < 1$, В случае, если функция достигнет единицы – это будет означать заполнение шкалы напряжения на максимум, если функция достигнет минус единицы, то шкала достигнет минимума. Оба этих варианта, как известно, приведут к проигрышу.

Итак, в нашем случае максимум шкалы – это капитал k равный единице. Т.е. совершаемые инвестиции, направленные на замещение изношенного капитала и амортизации, вследствие чего страдает оптимальный уровень потребления, так как завышенные расходы вычитаются из нашего выпуска продукции.

Минимум шкалы – это капитал равный минус единицы. Т.е. $\partial c/\partial k = F'(k) - b < 0$. Таким образом мы будем работать себе в минус.

Оптимальным уровнем потребления является «золотая середина» шкалы, т.е. значение ноль. Данный промежуток собой представляет $\partial c/\partial k = F'(k) - b = 0$; максимальную c . (рис.1.2).

Шкала подразумевает, что $\Delta k = 0$ и чистые инвестиции равны нулю. Таким образом, точка максимума на шкале есть максимальный устойчивый уровень потребления, но для этого нужен постоянный уровень запаса капитала, не превышающего «золотой середины». Это решение известно как золотое правило.

Из этого следует вывод, что экономика, потребляющая слишком много средств, в итоге разрушит свою капитальную базу, и будет работать себе в убыток. Чтобы этого избежать, нужно найти максимальную выгоду от потребления товара при оптимальном подборе капитала. Стоит заметить, что золотое правило не является единственным решением данной задачи. Существует также Оптимальное решение, которое обеспечит стабильность при отрицательном выпуске. Однако это решение рассматривает максимизацию производства не только в будущем, но и в нынешнем. Оптимальное решение использует дифференциальные исчисления, в частности уравнение Эйлера и функцию Лагранжа.

5. Теория экономического роста

Теория экономического роста рассматривает такие фундаментальные проблемы экономики, как развитие государств, увеличение прибыли и потребления, зависимость экономического роста от эндогенных и экзогенных факторов. Одним из главных вопросов этой теории, является объяснение причин мирового экономического роста: почему некоторые страны преуспевают в развитии больше других, почему мощнейший экономический скачок случился только в XIX веке?

Одним из первопроходцев в этом плане оказался Роберт Солоу. Стоит оговорить сразу, что все значение в его модели вводились экзогенно, предполагалась закрытая экономика, а значит отсутствовал экспорт и импорт. Модель всего лишь описывала экономический рост, не пытаясь ответить на некоторые вопросы, оставляла много не состыковок и ошибок. Однако при этом модель считается базовой в изучении экономического роста, поэтому рассмотрим несколько устоявшихся явлений.

В основе экзогенного роста используется неоклассическая производная функция:

$Y = F(K, EL)$, где Y – выпускаемый продукт, K – запас капитала, E – параметр эффективности труда, L – труд.

С помощью модели можно описать, почему многие только развивающиеся страны растут быстрее, чем развитые. В бедных странах малый запас капитальных мощностей. А так как они постоянно находятся в изношенном состоянии и их нужно все время пополнять, при этом со временем нужно тратить все больше и больше инвестиций, то в бедных странах даже одно новое предприятие даст огромный поток мощности, при этом ресурсов на восполнение капитала потратится немного. Но по мере накопления мощностей отдача от них падает, а ресурсов на их поддержание в рабочем состоянии требуется все больше, поэтому экономика замедляется.

Сразу же возникает не состыковка. Если модель Солоу действительно верна, то экономика должна была заморозиться, а все страны уравниаться по показателям экономического роста. Однако этого не происходит. Это тоже очень просто объясняется. Первоначальной модели Солоу не хватало одного фактора – технического прогресса. Технический прогресс должен был увеличивать рабочую силу. Например, работу, которую раньше выполняли десятки рабочих, теперь, благодаря новым технологиям, может выполнять один человек, а рабочая сила направится на другие сферы производства.

Подробнее технический прогресс изучил Пол Ромер в 1980-х годах. Ромер хотел узнать каким образом на экономику влияет технический прогресс. Технический прогресс – эндогенная величина, а значит, решение предложенной Солоу не могло полностью быть верным, т.к. все величины там были экзогенными. Однако в пользу варианта Солоу говорило то, что технологии не могли влиять лишь на одну фирму – они сразу же становились собственностью общественности и других фирм. Что бы это лучше понять обратимся к теории игр. Итак, у нас кооперативная игра с n количеством игроков. Стратегия одного из игроков $E(z, g(z))$. В данном случае $g(z)$ (информация доступная на текущий момент времени) – это технологии, которые могут быть доступны на текущий момент и которые приносят прибыль и выигрыш участнику. Оптимальным решением для других игроков, является повторение стратегии соперника и использование той же технологии, дабы увеличивать свой доход. Первый игрок может запатентовать свое изобретение, не позволяя другим игрокам использовать его, но это лишь временное решение и позже новая технология

будет доступна всем (и все же стоит учитывать, что временной отрезок, во время которого игрок единолично пользуется своим изобретением, даст небывалое усиление и позволит опередить своих соперников в плане экономического роста, поэтому вложения, инвестиции в разработку новых технологий, усиливающих экономику, является очень выгодным. Это также принуждает игроков самим вкладываться в новые открытия, а не ждать открытия другого игрока).

С игроками и их выгодой все понятно. Но что же в результате этого испытает сама экономика? Для начала стоит понимать, что информация $g(z)$ игрока q – это лишь часть из полной информации $G(q)$ (основы Теории Игр). Значит со временем игрокам будет доступно все больше и больше новой информации, больше новых технологий, технический прогресс будет усиливаться, а значит правила игры (в данном случае экономическая теория) будут развиваться, дополняться и меняться. Это означает, что от технического процесса выгоду получают не только фирмы, но и сама экономика. Таким образом, технический рост становится неотъемлемой частью экономического роста.

Еще одно важное исследование в теории экономического роста является вопрос экологии. Первым, кто изучал влияния климата на экономику, стал Уильям Нордхаус. Нордхаус ввел две новые переменные в производственную функцию: природные ресурсы и экологический ущерб. Природные ресурсы входят в эту функцию как один из факторов производства, наряду с рабочей силой и капитальными мощностями; экологический ущерб является отрицательным множителем, который уменьшает выпуск. Нордхаус предложил ввести налог на выбросы углерода. Чем больше государство или предприятие использует парниковые газы, тем больше будет штраф. Я полностью с ним согласен. Таким образом, улучшится экологическое состояние планеты, при этом будет просматриваться прямая связь с экономикой. Но и здесь есть свои нюансы. Во-первых, я считаю, что налог нужно вводить, только в странах с определенным уровнем ВВП. Так как, развивающимся странам нужны предприятия, использующие парниковые газы, дабы увеличить свой экономический рост. Во-вторых, это уменьшит КПД предприятий, что должно немного затормозить экономику.

У. Нордхаус и П. Ромер сделали мощнейший шаг в области изучения экономического роста. Но при этом множество вопросов, все еще остаются открытыми, еще не нашлось идеальной экономической модели. Я тоже предоставлю вам свою экономическую модель, основываясь на работах предшественников и, в частности, Теории Игр.

Итак, представим, что некий игрок q имеет стратегию $E_q(z, g(z))$. В данном случае стратегия будет считаться выигрышной, если будет наблюдаться интенсивный экономический рост. Формула выпускаемого продукта подается некоторым изменениям: $Y = F(K, E^{j+r}LB)$, где j – показатель технического прогресса, r – выбросы углерода, загрязнение экологии, а B – наличие ресурсов. Соответственно $E_q(z, g(z)) = Y$, где Y стремится к максимуму. При этом мы должны конкретизировать этот максимум и помнить, что чем больше капитал, тем больше мы должны будем заплатить за его износ из своего выпуска. Далее следует ограничить нашу стратегию шкалой напряжения. В данной ситуации шкала обозначает различные варианты взаимодействия с другими участниками игры. Максимумом шкалы является слишком агрессивная политика переговоров, которая может повлечь за собой разрыв торговых отношений или, в худшем случае, недоразумения, конфликты, войны. Минимум же является, слишком мягкая политика переговоров, в которой вы работаете себе в ущерб.

В результате получаем систему, в которой $E_q(z, g(z))=Y$ и $E_q(z, g(z))= S_q(z, g(z))$. В динамике это будет выглядеть следующим образом: $E_q=YZ < (Y(z+1)+x_1) < (Y(z+2)+x_2) \dots < Y(z+n)+\max x$. Это означает, что при оптимальной стратегией выпуск с каждым ходом должен увеличиваться до тех пор, пока не достигнет максимально возможного значения, установленное ограничивающим значением капитала и его износа. Таким образом мы увеличим показатели ВВП.

Теперь встает другой вопрос: как же достичь этого результата? Для начала нужно определить, что нам может мешать. Первое, это нужное количество ресурсов. Нам попросту может не хватать нужных материалов. В данном случае можно попытаться наладить импорт и экспорт. Обменивая товар, который у тебя находится в избытке, на эквивалентный товар, в котором ты нуждаешься, является типичным примером равновесия в теории игр. Здесь задействована тактика $\max \min$, в которой из максимально возможного проигрыша, который происходит при передачи своих ресурсов другому игроку, мы получаем минимальный, получая взамен нужные нам материалы.

Вторая проблема, с которой мы можем столкнуться – это непредвиденные траты. Например, война, выплата долга или поломка важного предприятия. В этих случаях наши инвестиции пойдут не на экономический рост, а на решение внутренних проблем. Причем войны могут повлечь за собой ужасающие и непредвиденные события и траты. Поэтому, вооруженные конфликты не

являются оптимальным решением конфликта, приведут к заполнению шкалы напряжения на максимум, и, как следствие, крушение внутренней экономики.

В случае отрицательных трат, нужно как можно быстрее возобновить производство на прежнем уровне, дабы компенсировать потерянный доход.

6. Коалиции

Одним из основополагающих факторов успешной стратегии является создание взаимовыгодных коалиций. При игре двух лиц у каждого игрока свои собственные интересы, которые всегда будут полностью противоположны целям соперника. Следовательно, когда выигрывает один игрок, то второй непременно проигрывает. Однако, когда количество игроков больше либо равно трем, их взаимоотношения могут быть весьма разнообразны. Так некоторый конкретный ход игрока q_1 , который, несомненно, будет для него выгодным, является проигрышным для игрока q_2 . Но это не означает, что он также будет невыгодным для игрока q_3 . Таким образом, у некоторых игроков могут возникать схожие интересы на определенных этапах игры, и дабы максимизировать свою выгоду, они будут объединяться в коалиции.

Рассматривая мою экономическую модель, фактом создания коалиций нельзя пренебрегать, ведь для некоторых изучаемых объектов именно объединение в группы является основополагающим фактором для достижения оптимальной стратегии. Тут стоит оговорить, что коалиции делятся на два типа: к первому типу относятся те объединения, чей суммарный выигрыш впоследствии делится между игроками, а ко второму – объединения, где получаемый коалицией выигрыш принадлежит этой же коалиции как таковой и не подлежит дальнейшему разделению между игроками.

Рассмотрим коалиции подробнее. Обозначим через Q множество всех игроков, $Q = \{1, 2, 3 \dots q\}$. Пусть одно из подмножеств игроков Q договариваются между собой о совместных действиях и, таким образом, образуют коалицию. Число таких коалиций, состоящих из r игроков, равно

числу сочетаний из q по r , то есть C_n^r , а число всевозможных коалиций равно $\sum_{r=1}^q$

$C_n^r = 2^q - 1$. Из этой формулы видно, что число всевозможных коалиций значительно растёт в зависимости от числа всех игроков в данной игре. Образовав коалицию, подмножество игроков Q действует как один игрок против остальных игроков, и выигрыш этой коалиции зависит от применяемых стратегий каждым из q игроков. Теперь проанализируем конкретный пример

кооперативной игры четырёх лиц. Для этого введем характеристическую функцию игры M , ставящую в соответствие каждой коалиции наибольший, получаемый ею выигрыш $M(K)$ (через K обозначим саму коалицию). Всего в игре четырёх лиц можно образовать шесть коалиций двух игроков - $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$. Характеристическая функция на этих коалициях будет равняться следующим соотношениям:

$$M(1,4) = 1 - M(2,3);$$

$$M(1,3) = 1 - M(2,4);$$

$$M(1,2) = 1 - M(3,4);$$

Из этого можно увидеть, что множество классов стратегической эквивалентности игр четырех игроков бесконечно и зависит от трех произвольных параметров $(M(K_1), M(K_2), M(K_3))$. Игры, состоящие из более чем четырех игроков, имеют большее разнообразие классов стратегической эквивалентности игр и, следовательно, большее количество произвольных параметров. Рассчитать их количество можно по формуле $2^{q-1} - q - 1$.

Теперь рассмотрим дележ, присущий первому типу коалиций. Пусть дележ x будет доминировать над дележом y , $x > y$. Наличие доминирования $x > y$ означает, что в множестве игроков Q найдется коалиция, для которой x предпочтительнее y . Одним из фундаментальных решений по нахождению оптимального распределения выигрыша между игроками является вектор Шепли. Вектор Шепли можно интерпретировать следующим образом: предельная величина, которую вносит игрок q в коалицию K , выражается как $(T) (T \setminus \{i\})$ и считается выигрышем i -го игрока; $i(T)$ – это вероятность того, что i -й игрок вступит в коалицию $T \setminus \{i\}$; $i()$ – средний выигрыш i -го игрока в такой схеме интерпретации. В том случае, когда – простейшая, $() (\setminus \{ \}) , , \setminus \{ \} p T T i T i$ не выигрывающая если T выигрывающая коалиция, если T выигрывающая коалиция, а коалиция. $1 0$ Следовательно $i i T T T t n t n () () ()! ()! ! 1$, где суммирование по T распространяется на все такие выигрывающие коалиции T , что коалиция $T \setminus \{i\}$ не является выигрывающей.

7. Вывод

Мою модель нельзя назвать универсальной. Она может использоваться только в сравнении государств. Однако и этот способ даст очень много информации.

Например, если на определенном отрезке времени применить мою модель к некоторым странам, то можно будет отчётливо увидеть зависимость экономического роста от тех или иных факторов. Таким образом, она поможет узнать какие из показателей стоит усовершенствовать тебе, дабы достичь оптимального уровня экономики. Огромную роль в построении модели играет Теория Игр. Поэтому научившись, анализируя информацию, подбирать выигрышную стратегию, можно достичь больших побед и успехов.

http://elenagavriile.narod.ru/TPR/Lekcciya_19-20.pdf

Приложение

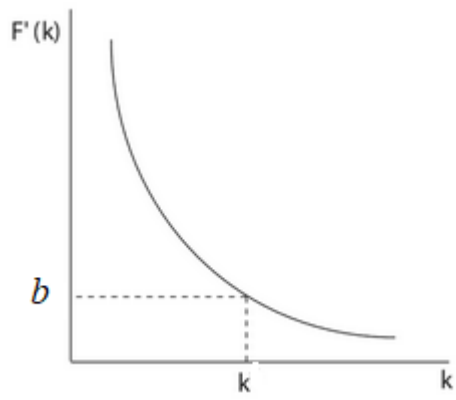


Рис. 1.1

