

ЗАВДАННЯ №9

Знайти закон розподілу заданої дискретної випадкової величини X . Визначити $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$.

4. Монета підкидається доти, доки вона випаде гербом. Випадкова величина X – число здійснених підкидань.

Розв'язок:

За умовою задачі випадкова величина X є цілочисловою з геометричним закон розподілу ймовірностей. Ймовірність випадання герба величина постійна і рівна одиниці розділеній на кількість сторін монети.

$$p = \frac{1}{2}; \quad q = \frac{1}{2}$$

Закон розподілу заданої дискретної величини X :

X	1	2	3	4	...	n
p	p	pq	pq^2	pq^3		pq^{n-1}

X	1	2	3	4	...	n
p	0,5	0,25	0,125	0,0625	...	

Математичне сподівання:

$$M(x) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Дисперсія:

$$D(x) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,5}{0,25} = 2$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{2} \approx 1,41$$

ЗАВДАННЯ №10

Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність розподілу $f(x)$ та ймовірність того, що X прийме значення в інтервалі (α, β) . Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

$$4. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3 \\ \frac{1}{6}(x+3), & -3 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2.$$

Розв'язок:

Обчислюємо похідні від закону розподілу X:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3 \\ \frac{1}{6}, & -3 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Це і буде щільність розподілу.

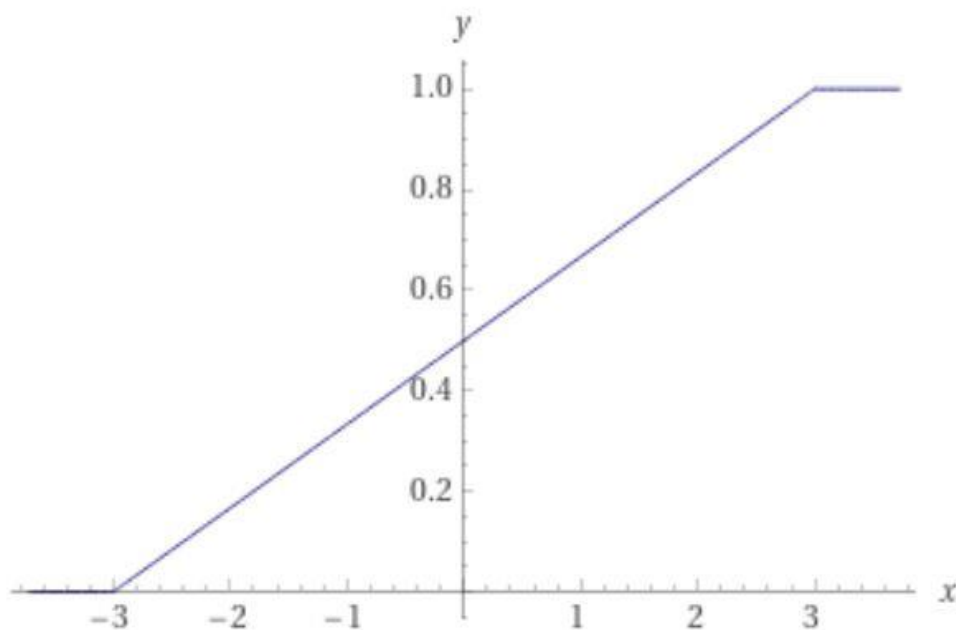
Ймовірність події $-1 < x < 2$ обчислимо за формулою:

$$P(-1 < x < 2) = F(2) - F(-1) = \frac{1}{6}(2+3) - \frac{1}{6}((-1)+3) = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

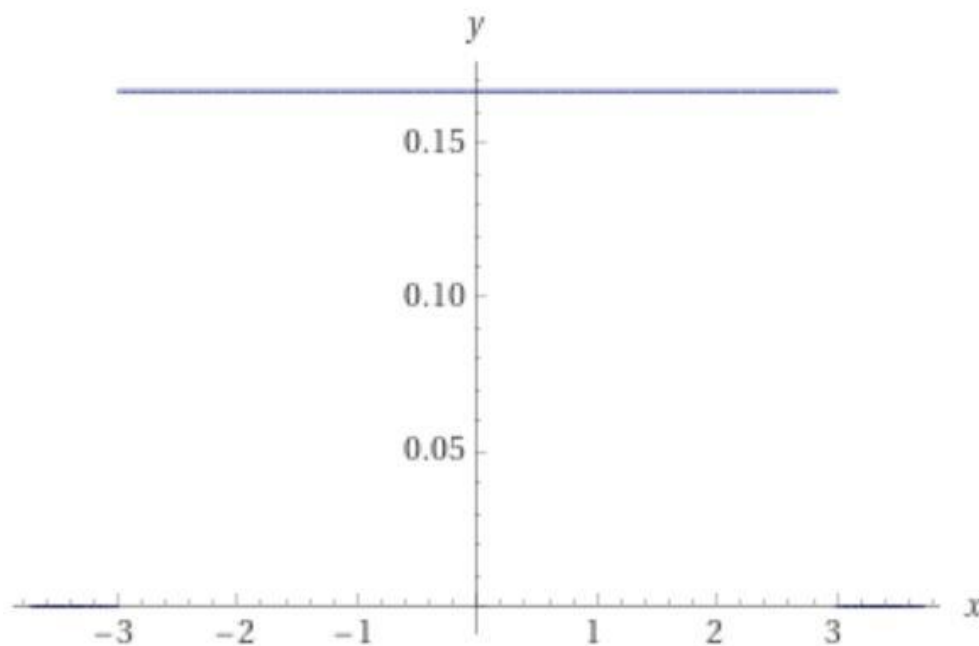
Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервал (α, β) визнається залежністю:

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$P(-1 < x < 2) = \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} x \Big|_{-1}^2 = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$



Графік залежності функції розподілу $F(x)$



Графік залежності щільності розподілу $f(x)$

ЗАВДАННЯ №11

Випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x)$. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X . Знайти функцію розподілу $F(x)$.

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, x > 2 \\ \frac{1}{10}(2x+3), & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Розв'язок:

Математичне сподівання для даної неперервної функції визначимо за формулою:

$$M(x) = \int_a^b x f(x) dx$$

$$M(x) = \int_0^2 x \frac{1}{10} (2x+3) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{5} x^2 + \frac{3}{10} x \right) dx = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 =$$

$$= \left(\frac{x^3}{15} + \frac{3x^2}{20} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{15} + \frac{12}{20} = \frac{17}{15} \approx 1,13$$

Дисперсія для даної неперервної функції визначимо за формулою:

$$D(x) = \int_a^b x^2 f(x) dx - M^2(x) = \int_0^2 x^2 \frac{1}{10} (2x+3) dx - \left(\frac{17}{15} \right)^2 = \int_0^2 \left(\frac{1}{5} x^3 + \frac{3}{10} x^2 \right) dx - \left(\frac{17}{15} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{3}{10} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 - \frac{289}{225} = \left(\frac{x^4}{20} + \frac{x^3}{10} \right) \Big|_0^2 - \frac{289}{225} = \frac{16}{20} + \frac{8}{10} - \frac{289}{225} = \frac{71}{225} \approx 0,32$$

Функцію розподілу $F(x)$ визначається інтегруванням щільності розподілу $f(x)$:

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = \frac{1}{10} \int_0^x (2x+3) dx = \frac{1}{10} \cdot (x^2 + 3x) \Big|_0^x = \frac{1}{10} \cdot (x^2 + 3x)$$

Записуємо загальний вигляд функції $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, x > 2 \\ \frac{1}{10}(x^2 + 3x), & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ №12

Відомо математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X . Знайти ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу (α, β) .

№	m	σ	α	β
4	4	5	0	8

Розв'язок:

Ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу (α, β) знайдемо за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = F\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right), \text{ де } F(x) - \text{функція Лапласа}$$

Враховуючи, що функція Лапласа непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, отримаємо:

$$P(0 < X < 8) = F\left(\frac{8-4}{5}\right) - F\left(\frac{0-4}{5}\right) = F(0,8) - F(-0,8) = 0,2881 + 0,2881 = 0,5762$$

ЗАВДАННЯ №13

4. Стрілянина ведеться з точки 0 уздовж прямої ОХ. Середня дальність польоту снаряда дорівнює m . Припускаючи, що дальність польоту X розподілена за нормальним законом із середньо квадратичним відхиленням $\sigma = 100$, знайти який відсоток снарядів, що випускаються, дає переліт від 20 до 50 м?

Розв'язок:

Іншими словами задача полягає в тому, що необхідно знайти ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал (α, β) .

В нашому випадку:

$$\alpha = 20 + m$$

$$\beta = 50 + m$$

m - математичне сподівання:

Ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу (α, β) знайдемо за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right), \text{ де } \Phi(x) - \text{функція Лапласа}$$

$$P(20 + m < X < 50 + m) = \Phi\left(\frac{50 + m - m}{100}\right) - \Phi\left(\frac{20 + m - m}{100}\right) = \Phi(0,5) - \Phi(0,2)$$

Використовуючи таблицю значень функції Лапласа знаходимо:

$$\Phi(0,5) = 0,1915$$

$$\Phi(0,2) = 0,0793$$

$$P(20 + m < X < 50 + m) = 0,1915 - 0,0793 = 0,1122$$

Щоб знайти відсоткове значення, помножимо 0,1122 на 100%. Отримаємо 11,22%.

ЗАВДАННЯ №14

Закон розподілу системи випадкових величин (X, Y) задається таблицею. Знайти: а) безумовні закони розподілу X , Y ; б) встановити залежний або ні X , Y ; в) знайти $M[X]$, $M[Y]$, $D[X]$, $D[Y]$; г) записати умовний закон розподілу випадкової величини Y при умові $X=x_i$ та знайти $M[Y|x_i]$ де $i = 1, 2, 3$; д) обчислити коефіцієнт кореляції.

4.

Y	X		
	-3	-2	0
1	0,2	0,1	0,15
2	0,15	0,25	0,15

Розв'язок:

а) Використовуючи формулу $\sum P(x_i, y_i) = p_i$ ($i = 1 \dots n$), знаходимо закон розподілу для X:

X	-3	-2	0	
P	0,35	0,35	0,3	$\sum P_i = 0$

Використовуючи формулу $\sum P(x_j, y_j) = p_j$ ($j = 1 \dots m$), знаходимо закон розподілу для Y:

Y	1	2	
P	0,45	0,55	$\sum P_j = 0$

б)

Коваріація:

$$\text{cov}(X, Y) = M[X \cdot Y] - M[X] \cdot M[Y]$$

$$\text{cov}(X, Y) = 1 \cdot (-3) \cdot 0,2 + 2 \cdot (-3) \cdot 0,15 + 1 \cdot (-2) \cdot 0,1 + 2 \cdot (-2) \cdot 0,25 + 1 \cdot 0 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0 \cdot 0,15 - (-1,75) \cdot 1,55 = 0,0125$$

$\text{cov}(X, Y) \neq 0$, отже випадкові величини X та Y залежні.

в) Математичне сподівання:

$$M(X) = (-3) \cdot 0,35 + (-2) \cdot 0,35 + 0 \cdot 0,3 = -1,75$$

$$M(Y) = 1 \cdot 0,45 + 2 \cdot 0,55 = 1,55$$

Дисперсія:

$$D(X) = 3^2 \cdot 0,35 + 2^2 \cdot 0,35 + 0^2 \cdot 0,3 - 1,75^2 = 1,49$$

$$D(Y) = 1^2 \cdot 0,45 + 2^2 \cdot 0,55 - 1,55^2 = 0,25$$

г)

Умовний закон розподілу $Y(X=-3)$.

$$P(Y=1/X=-3) = 0,2/0,35 = 0,57$$

$$P(Y=2/X=-3) = 0,15/0,35 = 0,43$$

Умовне математичне сподівання $M[Y/X=-3]$.

$$M[Y/X=x] = 1 \cdot 0,57 + 2 \cdot 0,43 = 1,43$$

Умовний закон розподілу $Y(X=-2)$.

$$P(Y=1/X=-2) = 0,1/0,35 = 0,29$$

$$P(Y=2/X=-2) = 0,25/0,35 = 0,71$$

Умовне математичне сподівання $M[Y/X=-2]$.

$$M[Y/X=x] = 1 \cdot 0,29 + 2 \cdot 0,71 = 1,71$$

Умовний закон розподілу $Y(X=0)$.

$$P(Y=1/X=0) = 0,15/0,3 = 0,5$$

$$P(Y=2/X=0) = 0,15/0,3 = 0,5$$

Умовне математичне сподівання $M[Y/X=0]$.

$$M[Y/X=x] = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5 = 1.5$$

д)

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(x)$ та $\sigma(y)$:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{1.49} = 1.22$$

$$\sigma(y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0.25} = 0.25$$

Коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma(x) \cdot \sigma(y)} = \frac{0.0125}{1.22 \cdot 0.25} = 0.0205$$

ЗАВДАННЯ №15

4. Скільки потрібно провести вимірів, щоб з імовірністю 0,9973 стверджувати, що похибка середнього арифметичного результатів цих вимірів не перевищує 0,01, якщо кожний вимір характеризується середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0,03$?

Розв'язок:

Скористаємось формулою, що визначає точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності по виборочній середній:

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2}$$

За умовою, $\gamma = 0,9973$, отже $\Phi(t) = 0,9973/2 = 0,49865$

Використовуючи таблицю значень функції Лапласа знаходимо t :

$$t = 3.00$$

$$\text{Отже: } n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2} = \frac{3^2 \cdot 0,03^2}{0,01^2} = 81$$

Отже потрібно провести 81 вимір.