Контрольна робота

Варіант 11

*Задача 1*

 За добу два заводи випускають 9000 виробів. Витрати на виробництво х1 виробів першим заводом дорівнюють f1(x1) у.г.о, а витрати на виробництво х2 виробів другим заводом дорівнюють f2(x2) у.г.о. Визначити скільки виробів повинен виготовити кожен завод, щоб загальні витрати на їх виробництво були мінімальними.

$$\left\{\begin{array}{c}f\_{1}\left(x\_{1}\right)=2x\_{1}^{2}+2x\_{1}\\f\_{2}\left(x\_{2}\right)=x\_{2}^{2}+4x\_{2}\end{array}\right.$$

Розв’язання

1. Записуємо функцію загальних витрат:

$$f\left(x\_{1},x\_{2}\right)=f\_{1}\left(x\_{1}\right)+f\_{2}\left(x\_{2}\right)=2x\_{1}^{2}+2x\_{1}+x\_{2}^{2}+4x\_{2}$$

Обмеження: $x\_{1}+x\_{2}=9000$

1. Записуємо функцію Лагранжа:

$L\left(x\_{1},x\_{2},λ\right)=2x\_{1}^{2}+2x\_{1}+x\_{2}^{2}+4x\_{2}+λ\left(x\_{1}+x\_{2}-9000\right)⟶min$
3) Знаходимо часткові похідні функції Лагранжа

$$\frac{∂L}{∂x\_{1}}=4x\_{1}+2+λ$$

$$\frac{∂L}{∂x\_{2}}=2x\_{2}+4+λ$$

4) Прирівнюємо знайдені часткові похідні до нуля й отримуємо систему рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{c}4x\_{1}+2+λ=0\\2x\_{2}+4+λ=0\\x\_{1}+x\_{2}-9000=0\end{array}\right.$$

Склавши перші два рівняння, перед цим домноживши перше на 2 отримуємо:

$$4x\_{1}+4x\_{2}+10+3λ=0$$

4($x\_{1}+x\_{2})+ 10+3λ=0$

4\*9000+10+$3λ=0$

$$3λ=-36010$$

$$λ=\frac{-36010}{3}$$

Звідси слідує:

$x\_{1}^{\*}=\frac{-2-λ}{4}=\frac{-2}{4}+\frac{36010}{12}≈3000$ (од.)

$x\_{2}^{\*}=\frac{-4-λ}{2}=\frac{-4}{2}+\frac{36010}{6}≈6000$ (од.)

Таким чином необхідно щоб перший завод виготовляв 3000 виробів, а другий – 6000. Витрати при цьому складуть:

$$L\left(x\_{1},x\_{2},λ\right)=2\*3000\*3000+2\*3000+6000\*6000+4\*6000+\frac{-36010}{3}(3000+$$

$+6000-9000)=54030000$ (у.г.о)

*Задача 2*

Для збільшення обсягів випуску продукції, яка користується підвищеним попитом, трьом підприємствам виділяють капіталовкладення в певному обсязі. В залежності від суми інвестицій відбувається збільшення виробництва продукції на кожному з трьох підприємств. Знайти розподіл інвестицій між підприємствами, який забезпечує максимальне збільшення випуску продукції.

|  |  |
| --- | --- |
| Інвестиції, тис.грн | Збільшення продукції на підприємствах, тис.грн |
| 1 підприємство | 2 підприємство | 1 підприємство |
| 60 | 14 | 15 | 16 |
| 120 | 35 | 25 | 24 |
| 180 | 45 | 47 | 50 |
| 240 | 72 | 70 | 68 |
| 300 | 84 | 100 | 90 |

Розв’язання

1. Записуємо вихідні дані у вигляді таблиці:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| f1 | f2 | f3 | xi |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 15 | 16 | 60 |
| 35 | 25 | 24 | 120 |
| 45 | 47 | 50 | 180 |
| 72 | 70 | 68 | 240 |
| 84 | 100 | 90 | 300 |

1. Етап умовної оптимізації

I этап.

1-ий крок. k = 3.

Припустимо, що всі інвестиції в розмірі x3 = 300 виділені підприємству №3. В цьому разі, максимальний доход, як це видно з таблиці складе f3(u3) = 90, а тому, F3(e3) = f3(u3)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| e2 | u3 | e3 = e2 - u3 | f3(u3) | F\*3(e3) | u3(e3) |
| 60 | 0 | 60 | 0 |   |   |
|   | 60 | 0 | 16 | 16 | 60 |
| 120 | 0 | 120 | 0 |   |   |
|   | 60 | 60 | 16 |   |   |
|   | 120 | 0 | 24 | 24 | 120 |
| 180 | 0 | 180 | 0 |   |   |
|   | 60 | 120 | 16 |   |   |
|   | 120 | 60 | 24 |   |   |
|   | 180 | 0 | 50 | 50 | 180 |
| 240 | 0 | 240 | 0 |   |   |
|   | 60 | 180 | 16 |   |   |
|   | 120 | 120 | 24 |   |   |
|   | 180 | 60 | 50 |   |   |
|   | 240 | 0 | 68 | 68 | 240 |
| 300 | 0 | 300 | 0 |   |   |
|   | 60 | 240 | 16 |   |   |
|   | 120 | 180 | 24 |   |   |
|   | 180 | 120 | 50 |   |   |
|   | 240 | 60 | 68 |   |   |
|   | 300 | 0 | 90 | 90 | 300 |

2-ий крок.. k = 2.

Визначаємо оптимальну стратегію при розподілі коштів між підприємствами №2, 3. При цьому рекурентне співвідношення Беллмана має вигляд:

F2(e2) = max(x2 ≤ e2)(f2(u2) + F3(e2-u2))

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| e1 | u2 | e2 = e1 - u2 | f2(u2) | F\*2(e1) | F1(u2,e1) | F\*2(e2) | u2(e2) |
| 60 | 0 | 60 | 0 | 16 | 16 | 16 | 0 |
|   | 60 | 0 | 15 | 0 | 15 |   |   |
| 120 | 0 | 120 | 0 | 24 | 24 |   |   |
|   | 60 | 60 | 15 | 16 | 31 | 31 | 60 |
|   | 120 | 0 | 25 | 0 | 25 |   |   |
| 180 | 0 | 180 | 0 | 50 | 50 | 50 | 0 |
|   | 60 | 120 | 15 | 24 | 39 |   |   |
|   | 120 | 60 | 25 | 16 | 41 |   |   |
|   | 180 | 0 | 47 | 0 | 47 |   |   |
| 240 | 0 | 240 | 0 | 68 | 68 |   |   |
|   | 60 | 180 | 15 | 50 | 65 |   |   |
|   | 120 | 120 | 25 | 24 | 49 |   |   |
|   | 180 | 60 | 47 | 16 | 63 |   |   |
|   | 240 | 0 | 70 | 0 | 70 | 70 | 240 |
| 300 | 0 | 300 | 0 | 90 | 90 |   |   |
|   | 60 | 240 | 15 | 68 | 83 |   |   |
|   | 120 | 180 | 25 | 50 | 75 |   |   |
|   | 180 | 120 | 47 | 24 | 71 |   |   |
|   | 240 | 60 | 70 | 16 | 86 |   |   |
|   | 300 | 0 | 100 | 0 | 100 | 100 | 300 |

3-ій крок. k = 1.

Визначаємо оптимальну стратегію при розподілі коштів між підприємствами №1, 2, 3. При цьому рекурентне співвідношення Беллмана має вигляд:

 F1(e1) = max(x1 ≤ e1)(f1(u1) + F2(e1-u1))

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| e0 | u1 | e1 = e0 - u1 | f1(u1) | F\*1(e0) | F0(u1,e0) | F\*1(e1) | u1(e1) |
| 60 | 0 | 60 | 0 | 16 | 16 | 16 | 0 |
|   | 60 | 0 | 14 | 0 | 14 |   |   |
| 120 | 0 | 120 | 0 | 31 | 31 |   |   |
|   | 60 | 60 | 14 | 16 | 30 |   |   |
|   | 120 | 0 | 35 | 0 | 35 | 35 | 120 |
| 180 | 0 | 180 | 0 | 50 | 50 |   |   |
|   | 60 | 120 | 14 | 31 | 45 |   |   |
|   | 120 | 60 | 35 | 16 | 51 | 51 | 120 |
|   | 180 | 0 | 45 | 0 | 45 |   |   |
| 240 | 0 | 240 | 0 | 70 | 70 |   |   |
|   | 60 | 180 | 14 | 50 | 64 |   |   |
|   | 120 | 120 | 35 | 31 | 66 |   |   |
|   | 180 | 60 | 45 | 16 | 61 |   |   |
|   | 240 | 0 | 72 | 0 | 72 | 72 | 240 |
| 300 | 0 | 300 | 0 | 100 | 100 | 100 | 0 |
|   | 60 | 240 | 14 | 70 | 84 |   |   |
|   | 120 | 180 | 35 | 50 | 85 |   |   |
|   | 180 | 120 | 45 | 31 | 76 |   |   |
|   | 240 | 60 | 72 | 16 | 88 |   |   |
|   | 300 | 0 | 84 | 0 | 84 |   |   |

Пояснимо побудову таблиць і послідовність проведення розрахунків.

Стовпці 1 (вкладені кошти), 2 (проект) і 3 (залишок коштів) для всіх трьох таблиць однакові, тому їх можна було б зробити спільними. Стовпець 4 заповнюється на основі вихідних даних про функції доходу, значення в стовпці 5 беруться з стовпця 7 попередньої таблиці, стовпець 6 заповнюється сумою значень стовпців 4 і 5 (у таблиці третього кроку стовпці 5 і 6 відсутні).

У стовпці 7 записується максимальне значення попереднього стовпця для фіксованого початкового стану, і в 8 стовпці записується управління з 2 стовпця, на якому досягається максимум в стовпці 7.

Етап II. Безумовна оптимізація.

З таблиці третього кроку маємо:

F\*1 (e0 = 300) = 100. Тобто максимальний дохід всієї системи підприємств при кількості коштів e0 = 300 дорівнює 100

З цієї ж таблиці отримуємо, що 1-му підприємству слід виділити

 u\*1 (e0 = 300) = 0

При цьому залишок коштів складе:

e1 = e0 - u1

e1 = 300 - 0 = 300

З таблиці 2-го кроку маємо F \* 2 (e1 = 300) = 100. Тобто максимальний дохід всієї системи при кількості коштів e1 = 300 дорівнює 100

З цієї ж таблиці отримуємо, що 2-му підприємству слід виділити u \* 2 (e1 = 300) = 300

При цьому залишок коштів складе:

e2 = e1 - u2

e2 = 300 - 300 = 0

Останньому підприємству дістається 0

Отже, інвестиції в розмірі 300 необхідно розподілити таким чином:

1-му підприємству виділити 0 тис.грн.

2-му підприємству виділити 300 тис.грн.

3-му підприємству виділити 0 тис.грн

Це забезпечить максимальне збільшення обсягу продукції, яке рівне 100 тис.грн. в грошовому вираженні.

*Задача 3*

 Дві конкуруючі фірми (гравці) реалізують на ринок продукцію, що швидко псується. Кожен з гравців прагне зайняти по два сегменти ринку (стратегії). Відомі прибуток (виграш) або збиток (програш) для кожного сегменту ринку ($a\_{ij})$, які наведені в платіжній матриці А. Знайдіть оптимальні стратегії та ціну гри кожного гравця і дайте економічну інтерпретацію розв’язку.

$$А=\left(\begin{matrix}2&10\\12&8\end{matrix}\right)$$

Розв’язання

1. Оптимальні стратегії знаходимо за формулами ($p\_{1}^{\*}$ і $p\_{2}^{\*}$ - оптимальні стратегії першого і другого гравця відповідно)

$$p\_{1}^{\*}=\frac{a\_{22}-a\_{21}}{a\_{11}+a\_{22}-a\_{12}-a\_{21}}=\frac{8-12}{2+8-10-12}=\frac{1}{3}$$

$$p\_{2}^{\*}=\frac{a\_{11}-a\_{12}}{a\_{11}+a\_{22}-a\_{12}-a\_{21}}=\frac{2-10}{2+8-10-12}=\frac{2}{3}$$

1. Ціну гри (v) знайдемо за формулою:

$$v=\frac{a\_{22}a\_{11}-a\_{12}a\_{21}}{a\_{11}+a\_{22}-a\_{12}-a\_{21}}=\frac{8\*2-10\*12}{2+8-10-12}=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$$

1. Економічна інтерпретація:

 При виборі оптимальної стратегії фірма 1 займе 1/3 долю ринку, а фірма 2 – 2/3 долі ринку при ціні гри 26/3. Фірма 2 матиме конкурентну перевагу над фірмою 1.

*Задача 4*

АТС має 3 лінії зв’язку. Потік викликів найпростіший з інтенсивністю 0,9 викликів у хвилину. Середній час переговорів складає 2,5 хвилини. Час переговорів має показниковий розподіл. Знайти абсолютну та відносну пропускні здатності АТС; ймовірність того, що всі лінії зв’язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв’язку. Визначити скільки ліній зв’язку повинна мати АТС, щоб ймовірність відмови не перевищувала 0,06.

Розв’язання

1. Знаходимо інтенсивність потоку обслуговування викликів µ:

$$μ=\frac{1}{t}=\frac{1}{2,5}=0,4 (хв^{-1})$$

1. Знаходимо інтенсивність загрузки каналу ρ:

$$ρ=\frac{λ}{μ}=\frac{0,9}{0,4}=2,25$$

1. Знаходимо граничні імовірністі відмови ліній:

$$p\_{0}=\left(1+ρ+\frac{ρ^{2}}{2!}+\frac{ρ^{3}}{3!}\right)^{-1}=\left(1+2,25+\frac{2,25^{2}}{2}+\frac{2,25^{3}}{6}\right)^{-1}=\frac{1}{7,6797}=0,13$$

$$p\_{1}=ρ\*p\_{0}=2,25\*0,13=0,293$$

$$p\_{2}=\frac{ρ^{2}}{2!}\*p\_{0}=\frac{2,25^{2}}{2}\*0,13=0,329$$

$$p\_{3}=\frac{ρ^{3}}{3!}\*p\_{0}=\frac{2,25^{3}}{6}\*0,13=0,247$$

1. Знаходимо ймовірність того, що всі лінії зв’язку зайняті:

$$p\_{в}=p\_{3}=\frac{ρ^{3}}{3!}\*p\_{0}=0,247$$

1. Знаходимо відносну пропускну здатність АТС:

$$q=1-p\_{в}=1-0,247=0,753$$

1. Знаходимо абсолютну пропускну здатність АТС:

$$a= λ\*q=0,9\*0,753=0,678$$

1. Знаходимо середнє число зайнятих ліній зв’язку:

$$\overbar{k}=\sum\_{k=0}^{n}k\*p\_{k}=1\*0,293+2\*0,329+3\*0,247=0,293+0,658+0,741=1,692$$

1. Визначаємо скільки ліній зв’язку повинна мати АТС, щоб ймовірність відмови не перевищувала 0,06.

Має виконуватися нерівність:

$$\frac{2,25^{k}}{k!}\*0,13\leq 0,06$$

Лише при k = 6 ця нерівність виконується, а тому АТC повинна мати шість ліній зв’язку.

$$\frac{2,25^{6}}{6!}\*0,13\leq 0,06$$

$$\frac{129,746}{720}\*0,13=0,023 (<0,06)$$

При k = 5 ця нерівність не виконується, а тому АТС повинна мати шість ліній зв’язку, щоб не перевищувати ймовірность відмови рівну 0,06.