Вариант 2

1. Решить задачу Коши двумя способами. Непосредственно и методом преобразования Лапласа.

y''+2y'+y=ex(4x+4)

y(0)=0

y'(0)=1

Решение:

Имеем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения второго порядка:

y''+2y'+y=0.

Характеристическое уравнение:

λ2+2λ+1=0;

(λ+1)2=0;

λ1,2=-1 – получены кратные действительные корни, поэтому общее решение:

, где С1, С2 – const.

а) Частное решение находим в виде:

y\*=(Ax+B)ex

Найдём первую и вторую производные:

(y\*)'=((Ax+B)ex)'=(Ax+B)'ex+(Ax+B)(ex)'=Aex+(Ax+B)ex=(Ax+A+B)ex

(y\*)''=((Ax+A+B)ex)'=(Ax+A+B)'ex+(Ax+A+B)(ex)'=Aex+(Ax+A+B)ex= =(Ax+2A+B)ex

Подставим y\*, (y\*)', (y\*)'' в левую часть неоднородного уравнения и упростим выражение:

(Ax+2A+B)ex+2(Ax+A+B)ex+(Ax+B)ex=(4Ax+4A+4B)ex=ex(4x+4);

4Ax+4A+4B=4x+4;

Таким образом, y\*=xex.

Общее решение неоднородного уравнения:

y=+y\*=.

Найдём частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям y(0)=0, y'(0)=1:

y(0)=;

y'(0)=(

y'(0)=,

C2=C1=0.

Подставим найденные значения констант C1=0, C2=0 в общее решение

y=:

y=

б) **общее решение неоднородного** уравнения будем искать в виде:

Решим систему уравнений с двумя неизвестными:

;

;

.

Решим систему методом Крамера:

В результате, общее решение неоднородного уравнения второго порядка:

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям y(0)=0, y'(0)=1:

Подставим найденные значения констант C1=0, C2=0 в общее решение

:

Ответ: y..

2. x2y''-2y=lnx.

Решение:

Имеем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами.

Рассмотрим сначала однородное уравнение и построим его фундаментальную систему решений. Можно заметить, что одним из решений однородного уравнения

x2y''-2y =0

является функция y1=x2. Найдём второе независимое решение y2 по формуле Лиувилля–Остроградского:

Делим обе части уравнения на :

Итак, общее решение однородного уравнения выражается функцией

Преобразуем исходное дифференциальное уравнение в стандартную форму:

y''-2y/x2=(lnx)/x2

Теперь воспользуемся методом вариации постоянных и построим общее решение неоднородного уравнения. Будем рассматривать параметры C1 и C2 как функции от переменной x. Производные этих функций определяются из системы уравнений

где A1,A2 − постоянные интегрирования.

В результате получаем общее решение неоднородного уравнения в виде

Ответ: .