Державний вищий навчальний заклад

**«Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»**

Кафедра математичного і функціонального аналізу

# **КУРСОВА РОБОТА**

на тему

**Розв’язування інтегральних рівнянь**

**Фредгольма та Вольтерра ІІ роду**

**методом ітерованих ядер**

Студентки ІІІ курсу, групи М-32

напряму підготовки «Математика»

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Керівник: доцент, кандидат фізико-математичних наук Федак І.В.

Національна шкала: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Університетська шкала: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Оцінка ECTS: \_\_\_\_

 Члени комісії: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

м. Івано-Франківськ - 2015 рік

План

Вступ.

1. Оператор, обернений до І-А. Степені інтегральних операторів.
2. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма ІІ роду.
3. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних операторів Вольтерра ІІ роду.
4. Наближене розв’язування лінійних інтегральних рівнянь ІІ роду методом ітерованих ядер.
5. Приклади.

Висновки.

Список використаних джерел.

***Вступ***

Лінійним інтегральним рівнянням називають інтегральне рівняння, в яке невідома функція входить лінійно.

Одним з найважливіших класів таких рівнянь є лінійні інтегральні рівняння Фредгольма. Серед них виділяють рівняння Фредгольма І роду



та ІІ роду



де  шукана функція,  задана у квадраті  функція, яку називають ядром рівняння,  задана на проміжку  функція, яку називають вільним членом рівняння,  параметр (дійсний або комплексний). При цьому числа  та  можуть бути і невласними, а проміжок інтегрування – нескінченним.

 Надалі вважатимемо, що функція  або неперервна у квадраті  або задовольняє умову ****а функція  або неперервна на відрізку  або **** Ядро, яке задовольняє вказану умову називають фредгольмовим.

Якщо у інтегральних рівняннях Фредгольма І та ІІ роду функція  то ці рівняння називають однорідними, а у іншому разі – неоднорідними.

Ще одним важливим класом лінійних інтегральних рівнянь є лінійні інтегральні рівняння Вольтерра:



та



І та ІІ роду відповідно, ядра яких  або неперервні у трикутнику  або задовольняють умову ****

Покладаючи



рівняння Вольтерра можна розглядати як окремий випадок рівняння Фредгольма з ядром 

Інтегральні рівняння та методи їх дослідження широко використовуються у різних галузях і розділах сучасної науки й техніки, наприклад, у теорії пружності, теорії пластичності, гідродинаміці, теорії масо переносу і тепло переносу, теорії керування, біомеханіці, економіці, медицині, теорії масового обслуговування.

Зокрема, рівняння Вольтерра ІІ роду типові при описі фізичних процесів, пов’язаних з явищем післядії. В цих рівняннях змінна $x$ зазвичай позначає час. Тоді стан системи, що характеризується функцією $y(x)$, визначається зовнішньою дією $f(x)$ і залежить від стану системи в попередні моменти часу. Ядро $K(x,s)$ описує величину післядії стану системи в момент $s$ на стан системи в момент $x>s$.

Задача Коші для звичайного лінійного диференціального рівняння *n*-го порядку з неперервними коефіцієнтами може бути зведена до інтегрального рівняння Вольтерра ІІ роду. Покажемо це на прикладі диференціального рівняння 2-го порядку.

, (\*)

. (1)

Нехай

. (2)

Враховуючи початкові умови та формулу

,

послідовно знаходимо 

 (3)

На підставі (2), (3) рівняння (\*) можна записати

. (4)

Покладемо 

Тоді (4) набуває вигляду

. (5)

Таким чином задача Коші (\*), (1) звелась до розв'язання інтегрального рівняння (5). Знайдену функцію  підставимо в друге співвідношення (3) і отримаємо розв’язок  задачі (\*), (1).

 Існування єдиного розв’язку рівняння (5) випливає з існування єдиного розв’язку задачі Коші (\*), (1) для лінійного диференційного рівняння з неперервними коефіцієнтами в околі точки .

До однорідних інтегральних рівнянь Фредгольма ІІ роду приводять задачі про власні коливання системи, тобто коливання при відсутності зовнішньої сили, при розгляді задач, коли струна знаходиться під дією зовнішнього навантаження виникають неоднорідні інтегральні рівняння Фредгольма ІІ роду.

Широке застосування теорії інтегральних рівнянь пов’язане з різнобічними поглядами та захопленнями їх авторів – Вітто Вольтерра (3.05.1860, Анкона – 11.10.1940, Рим) та Еріка Івара Фредгольма (1866-1927). Фредгольм є засновником загальної теорії лінійних інтегральних рівнянь. Найвідоміші роботи Вольтерри в області диференціальних рівнянь з частинними похідними, теорії пружності, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, функціонального аналізу. Після Першої світової війни його наукові погляди змістилися до застосування математичних ідей в біології, в цій сфері він суттєво переробив і розвинув результати, отримані П’єром Феррхюльстом. Найвідоміший результат цієї роботи – створення моделі Лотки-Вольтерри.

1. ***Оператор, обернений до І-А. Степені інтегральних операторів.***

Нехай маємо два топологічні лінійні простори  та  Відображення  яке задовольняє умову



називається лінійним оператором.

Зауважимо, що при цьому  не обов’язково вважають визначеним на всьому просторі  Важливо тільки, щоб його область визначення  була лінійним підпростором в 

Оператор  називається неперервним в точці  якщо для кожного околу  існує такий окіл  що  для всіх 

Для нормованих просторів  та  це означення можна сформулювати так: оператор  називається неперервним в точці  якщо для кожного  існує таке  що  для всіх  таких, що 

Якщо оператор неперервний у кожній точці  то його називають неперервним оператором. Як і для лінійних функціоналів, для неперервності лінійного оператора достатньо, щоб він був неперервним принаймні в одній точці 

Лінійний оператор  який визначений на всьому просторі  називається обмеженим, якщо він кожну обмежену множину переводить в обмежену.

Всякий неперервний лінійний оператор є обмеженим. Для нормованих просторів справедливе також обернене твердження. Зокрема, для таких просторів обмеженість лінійного оператора  рівносильна існуванню сталої  що 

для всіх  Найменшу з таких сталих  називають нормою оператора  і позначають  Звідси також отримуємо для всіх  нерівність 

Норму лінійного обмеженого оператора можна визначити ще й так:



Для лінійних операторів природним чином вводяться операції додавання та множення на число:



При цьому сума та добуток на число лінійних неперервних операторів теж є лінійними неперервними операторами. Отже, сукупність таких операторів утворює лінійний простір.

У випадку нормованих просторів  та  це випливає з рівності



та нерівності



У такому лінійному просторі може бути введена норма за записаними вище формулами. В результаті отримаємо нормований простір лінійних обмежених операторів.

У разі повноти простору  простір лінійних обмежених операторів теж є банаховим.

Найпростішими прикладами лінійних операторів є *одиничний* *оператор*  такий, що  для всіх  та *нульовий оператор*  такий, що  для всіх 

Розглянемо ще один приклад оператора:  такий, що  де  неперервна у квадраті  функція.

Його називають інтегральним оператором Фредгольма.

Лінійність такого оператора випливає з властивостей інтеграла Рімана. Крім того,  Тому  Отже, цей оператор є обмеженим. Його норма рівна



Зокрема, якщо  у квадраті  то 

Зауважимо, що інтегральний оператор Фредгольма можна розглядати і як оператор  при умові, що



Він також буде обмеженим оператором з нормою 

Оператор  називається оборотним, якщо для кожного  з множини  значень цього оператора рівняння  має єдиний розв’язок  При цьому відображення  яке кожному  ставить у відповідність цей єдиний розв’язок  називається оператором, оберненим до оператора 

Таким чином, справедливі рівності: 

Наступна теорема не лише встановлює існування оберненого оператора, а й вказує спосіб його практичного знаходження:

Теорема. Якщо  лінійний обмежений оператор, який відображає банаховий простір  в себе, причому  то оператор  існує, є обмеженим і представляється у вигляді

**

Доведення. Оскільки ** то



З цієї нерівності та повноти простору  випливає, що сума ряду  є лінійним обмеженим оператором. Крім того, для кожного  маємо



Перейшовши тут до границі при  з врахуванням  отримаємо, що



звідки й випливає рівність 

Як приклад практичного застосування цієї теореми розглянемо розв’язування лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду



у просторі 

Нехай  інтегральний оператор Фредгольма і  Тоді в операторному вигляді отримуємо рівняння 

єдиним розв’язком якого є  при умові, що 

Оскільки  то для виконання цієї умови достатньо вимагати, щоб виконувалась нерівність 

У просторі  неперервних на $[a,b]$ функцій розглянемо інтегральний оператор Фредгольма

**** (1.1)

З’ясуємо вигляд його степенів:

****

****

Помінявши у цій формулі місцями змінні  та  отримуємо

****

де позначено

****

Якщо ядро  неперервне у квадраті  то ядро  теж буде неперервним у  Таким чином, квадрат інтегрального оператора Фредгольма є інтегральним оператором Фредгольма.

У загальному випадку

**** (1.2)

де ****

Ядра  називають ітерованими.

Розглянемо тепер у просторі  інтегральний оператор Вольтерра

 (1.3)

 Для його квадрата у трикутнику  маємо





Помінявши місцями змінні  та  отримуємо

****

де ****

У загальному випадку

**** (1.4)

де ****

Зауважимо, що формули (1.2), (1.4) для степенів операторів Фредгольма та Вольтерра справджуються також у просторі 

***2.Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма ІІ роду.***

Розглянемо у просторі  інтегральне рівняння Фредгольма ІІ роду

 (2.1)

у якому ядро  обмежене у квадраті  тобто  а функція  неперервна на відрізку 

Запишемо рівняння (2.1) в операторному вигляді:

 (2.2.)

де **** інтегральний оператор Фредгольма у просторі 

Якщо

 (2.3)

то  а отже, існує оператор 

тобто розв’язок операторного рівняння (2.2) матиме вигляд



Тому розв’язком інтегрального рівняння (2.1) є функція



Зауважимо, що останню рівність ми мали право записати, оскільки ряд у дужках за умови (2.3) збігається рівномірно. Справді, послідовно отримуємо оцінки: 



Оскільки також  і за ознакою Даламбера при  ряд  збігається, то ряд  рівномірно збіжний.

Позначаючи 

розв’язок  рівняння (2.1) запишемо у вигляді

 (2.4)

Функцію  називають резольвентою, а наведений спосіб розв’язування інтегральних рівнянь – методом ітерованих ядер. Зауважимо, що у просторі  для існування резольвенти достатньо вимагати виконання нерівності  де 

***3.Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних операторів Вольтерра ІІ роду.***

Аналогічно як і для рівняння Фредгольма ІІ роду можна отримати розв’язок рівняння Вольтерра ІІ роду

 (3.1)

у вигляді

 (3.2)

 Обґрунтуємо, що при цьому ряд



для кожного значення  є рівномірно збіжним в області



 Для ядер  маємо оцінки:







Міркуючи аналогічно, отримуємо нерівність



яку нескладно довести методом математичної індукції.

Звідси випливає, що



Оскільки за ознакою Даламбера числовий ряд  збіжний для кожного  то за ознакою Вейєрштраса ряд для резольвенти для кожного  збігається рівномірно.

***4.Наближене розв’язування лінійних інтегральних рівнянь ІІ роду методом ітерованих ядер.***

Метод ітерованих ядер можна використати і для наближеного розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма ІІ роду. Для цього покладемо



і визначимо наближений розв’язок за формулою



Якщо   то похибка





Проаналізуємо наближене розв’язування рівняння



резольвентою якого є функція



Покладаючи



і враховуючи, що    переконуємося, що для досягнення похибки  достатньо взяти  Справді, якщо  то



а тому



Точнішу оцінку для отриманої похибки дає нерівність



за допомогою якої переконуємося, що для досягнення точності наближення в 0,001 достатньо обмежитися 

Враховуючи, що рівняння Вольтерра є окремим випадком рівняння Фредгольма, аналогічні оцінки для похибок наближених розв’язків можна використовувати і для розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра ІІ роду.

***5.Приклади.***

1. Розв’язати методом ітерованих ядер рівняння Фредгольма ІІ роду

 (5.1)

Розв’язання. Маємо

   

  

Оскільки  то розв’язок рівняння (5.1) шукаємо у просторі 

Послідовно отримуємо:









Отже, резольвентою рівняння (5.1) є функція





а згідно з (2.4)



2. Розв’язати методом ітерованих ядер рівняння Вольтерра ІІ роду

**** (5.2)

Розв’язання. Послідовно знаходимо ітеровані ядра:

****

****

****



 ****



****

Обґрунтуємо останню рівність методом математичної індукції. Для  вона вірна. Припускаючи її виконання для  для  отримуємо





звідки випливає справедливість потрібної рівності для кожного 

Тепер знайдемо резольвенту рівняння (5.2)



Отже,





***Висновки***

Дана курсова робота присвячена одному з методів розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра ІІ роду та Фредгольма ІІ роду – методу ітерованих ядер.

У вступі наведено означення та класифікація лінійних інтегральних рівнянь, їх застосування у математиці та прикладних галузях, подані короткі біографічні дані засновників теорії лінійних інтегральних рівнянь – Вітто Ворльтерри та Еріка Івара Фредгольма.

Перший розділ містить деякі теоретичні дані стосовно лінійних інтегральних рівнянь, які необхідні в подальшому для дослідження даного типу рівнянь, а також розв’язування їх методом ітерованих ядер, зокрема розглянуто поняття оберненого оператора, та степенів інтегральних операторів.

У другому та третьому розділах подані умови, які дозволяють використовувати даний метод для розв’язання лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма ІІ роду та Вольтерра ІІ роду, а також описано сам метод ітерованих ядер.

У четвертому розділі продемонстровано застосування даного методу до наближеного розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма ІІ роду та наведено приклад.

У п’ятому розділі показано практичне використання методу ітерованих ядер для розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма ІІ роду та Вольтерра ІІ роду.

Враховуючи широке застосування теорії лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма ІІ роду та Вольтерра ІІ роду можна стверджувати, що тема курсової робота є актуальною.

***Список використаних джерел***

1. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 160 с.
2. Гурса Е. Курс математического анализа. Т.3. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. – Москва: ГОСТЕХИЗД, 1984. – 320 с.
3. Забрейко П.П., Кошелев А.И, Красносельский М.А., Михмен С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я. Интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 448 с.
4. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: КомКнига, 2006. – 304 с.
5. Краснов М. Л. Киселев А. И., Ма­­ка­ренко Г. И. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с под­­робными решениями. – М.: Наука, 1975. – 303 с.
6. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. – М.: Факториал Пресс, 2000. – 384 с.
7. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Методы решения интегральных уравнений. – Москва: Факториал, 1999. – 282 с.
8. Петровский И. Г. Лекции по теории линейных интегральных урав­не­ний. – Москва: Наука, 1965. – 128 с.
9. Федак І.В., Гой Т.П. Лінійні інтегральні рівняння: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Голіней, 2011. – 152 с.
10. Федак І. В. Функціональний аналіз. Навчальний посібник. – Івано-Франківськ.: Сімик, 2011. – 120 с.
11. Цлаф Л.Я Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1966. – 176 с.