(титульный лист)

**Задание 1.** Найти произведение заданных матриц А и В.

$$A=\left(\begin{matrix}5&-8\\10&3\\0&-9\\6&8\end{matrix}\right) B=\left(\begin{matrix}4&-3&2\\5&4&-5\end{matrix}\right)$$

**Решение**

Размерность матрицы *А* 4х2, размерность матрицы *В* 2х3. Произведение матриц будет иметь размерность 4х3.

$$AB=\left(\begin{matrix}5&-8\\10&3\\0&-9\\6&8\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}4&-3&2\\5&4&-5\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-20&-47&50\\55&-18&5\\-45&-36&45\\64&14&-28\end{matrix}\right)$$

**Задание 2.** Решить систему линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера, матричным методом и методом Гаусса.

$$\left\{\begin{array}{c}-2x\_{1}+3x\_{2}-6x\_{3}=3\\5x\_{1}+x\_{2}+3x\_{3}=13\\-x\_{1}+2x\_{2}+3x\_{3}=-2\end{array}\right.$$

**Решение**

$$A=\left(\begin{matrix}-2&3&-6\\5&1&3\\-1&2&3\end{matrix}\right), B=\left(\begin{matrix}3\\13\\-2\end{matrix}\right), X=\left(\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{matrix}\right).$$

1) Решим систему уравнений по формулам Крамера.

$$x\_{1}=\frac{∆x\_{1}}{∆}, x\_{2}=\frac{∆x\_{2}}{∆}, x\_{3}=\frac{∆x\_{3}}{∆}.$$

$$∆=\left|\begin{matrix}-2&3&-6\\5&1&3\\-1&2&3\end{matrix}\right|=-6-60-9-6+12-45=-114\ne 0$$

Определитель матрицы системы не равен нулю, значит, система совместна и имеет единственное решение.

$$∆x\_{1}=\left|\begin{matrix}3&3&-6\\13&1&3\\-2&2&3\end{matrix}\right|=9-156-18-12-18-117=-312$$

$$∆x\_{2}=\left|\begin{matrix}-2&3&-6\\5&13&3\\-1&-2&3\end{matrix}\right|=-78+60-9-78-12-45=-162$$

$$∆x\_{3}=\left|\begin{matrix}-2&3&3\\5&1&13\\-1&2&-2\end{matrix}\right|=4+30-39+3+52+30=80$$

$$x\_{1}=\frac{-312}{-114}=\frac{52}{19}, x\_{2}=\frac{-162}{-114}=\frac{27}{19}, x\_{3}=\frac{80}{-114}=-\frac{40}{57}.$$

2) Решим систему уравнений матричным методом.

Система уравнений в матричной форме имеет вид: *А·Х=В*.

Тогда *Х=А-1·В*.

Найдем определитель матрицы системы:

$$∆=\left|\begin{matrix}-2&3&-6\\5&1&3\\-1&2&3\end{matrix}\right|=-114\ne 0$$

Определитель матрицы системы не равен нулю, значит, обратная матрица существует.

Найдем *А-1*.

$$A\_{11}=\left|\begin{matrix}1&3\\2&3\end{matrix}\right|=-3 A\_{21}=-\left|\begin{matrix}3&-6\\2&3\end{matrix}\right|=-21 A\_{31}=\left|\begin{matrix}3&-6\\1&3\end{matrix}\right|=15$$

$$A\_{12}=-\left|\begin{matrix}5&3\\-1&3\end{matrix}\right|=-18 A\_{22}=\left|\begin{matrix}-2&-6\\-1&3\end{matrix}\right|=-12 A\_{32}=-\left|\begin{matrix}-2&-6\\5&3\end{matrix}\right|=-24$$

$$A\_{13}=\left|\begin{matrix}5&1\\-1&2\end{matrix}\right|=11 A\_{23}=-\left|\begin{matrix}-2&3\\-1&2\end{matrix}\right|=1 A\_{33}=\left|\begin{matrix}-2&3\\5&1\end{matrix}\right|=-17$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{114}\left(\begin{matrix}-3&-21&15\\-18&-12&-24\\11&1&-17\end{matrix}\right)$$

Проверка:

$$A^{-1}∙A=-\frac{1}{114}\left(\begin{matrix}-3&-21&15\\-18&-12&-24\\11&1&-17\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}-2&3&-6\\5&1&3\\-1&2&3\end{matrix}\right)=$$

$$=-\frac{1}{114}\left(\begin{matrix}-114&0&0\\0&-114&0\\0&0&-114\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)=Е$$

Обратная матрица найдена верно.

$$X=-\frac{1}{114}\left(\begin{matrix}-3&-21&15\\-18&-12&-24\\11&1&-17\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3\\13\\-2\end{matrix}\right)=-\frac{1}{114}\left(\begin{matrix}-312\\-162\\80\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{52}{19}\\\frac{27}{19}\\-\frac{40}{57}\end{matrix}\right)$$

3) Решим систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{matrix}3\\13\\-2\end{matrix}\right)\~\left(\begin{matrix}-2\\3\\13\end{matrix}\right)\~\left(\begin{matrix}-2\\7\\3\end{matrix}\right)\~$$

$$\~\left(\begin{matrix}-2\\7\\80\end{matrix}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{c}-x\_{1}+2x\_{2}+3x\_{3}=-2\\-x\_{2}-12x\_{3}=7\\-114x\_{3}=80\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{3}=-\frac{40}{57}\\x\_{2}=-7-12x\_{3}=-7-12∙\left(-\frac{40}{57}\right)=\frac{27}{19}\\x\_{1}=2+2x\_{2}+3x\_{3}=2+2∙\frac{27}{19}+3∙\left(-\frac{40}{57}\right)=\frac{52}{19}\end{array}\right.$$

Ответ: $(\frac{52}{19}, \frac{27}{19}, -\frac{40}{57})$

 **Задание 3.** Показать, что векторы а1, а2, а3 образуют базис в пространстве R3, и найти координаты вектора а4 в этом базисе.

$$\overbar{a}\_{1}=\left(2, -1, 2\right), \overbar{a}\_{2}=\left(3, 1, -1\right), \overbar{a}\_{3}=\left(1, 1, 5\right), \overbar{a}\_{4}=\left(12, 1, -12\right).$$

**Решение**

Если векторы $\overbar{a}\_{1}, \overbar{a}\_{2}, \overbar{a}\_{3}$ образуют базис, то они линейно независимы, т.е. существуют и притом единственные такие действительные числа *α, β, γ*, что $\overbar{a}\_{4}=α∙\overbar{a}\_{1}+β∙\overbar{a}\_{2}+γ∙\overbar{a}\_{3}$. В координатной форме это равенство принимает вид системы линейных алгебраических уравнений

$$\left\{\begin{array}{c}2α+3β+γ=12\\-1α+β+γ=1\\2α-β+5γ=-12\end{array}\right.$$

Найдем определитель основной матрицы системы:

$$∆=\left|\begin{matrix}2&3&1\\-1&1&1\\2&-1&5\end{matrix}\right|=10+1+6-2+2+15=32\ne 0$$

Так как определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то существует единственное решение системы, а значит векторы $\overbar{a}\_{1}, \overbar{a}\_{2} и \overbar{a}\_{3}$ образуют базис. Найдем значения *α, β, γ* методом Крамера:

$$∆\_{1}=\left|\begin{matrix}12&3&1\\1&1&1\\-12&-1&5\end{matrix}\right|=60-1-36+12+12-15=32$$

$$∆\_{2}=\left|\begin{matrix}2&12&1\\-1&1&1\\2&-12&5\end{matrix}\right|=10+12+24-2+24+60=128$$

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&3&12\\-1&1&1\\2&-1&-12\end{matrix}\right|=-24+12+6-24+2-36=-64$$

$$α=\frac{∆\_{1}}{∆}=\frac{32}{32}=1, β=\frac{∆\_{2}}{∆}=\frac{128}{32}=4, γ=\frac{∆\_{3}}{∆}=\frac{-64}{32}=-2.$$

Таким образом, вектор $\overbar{a}\_{4}$ в базисе $\overbar{a}\_{1}, \overbar{a}\_{2},\overbar{a}\_{3}$ имеет координаты:

$$\overbar{a}\_{4}=\left(1, 4, -2\right)$$

Ответ: $\overbar{a}\_{4}=\left(1, 4, -2\right)$

**Задание 4.** Определить ранг заданной матрицы.

$$A=\left(\begin{matrix}6&-8&3&10\\6&3&-4&-2\\12&-5&-1&8\end{matrix}\right)$$

**Решение**

Приведем матрицу к треугольному виду.

Умножим 1-ую строку на (-1). Добавим 1-ую строку ко 2-ой:

$$\left(\begin{matrix}6&-8&3&10\\6&3&-4&-2\\12&-5&-1&8\end{matrix}\right)\~\left(\begin{matrix}6&-8&3&10\\0&11&-7&-12\\0&11&-7&-12\end{matrix}\right)\~\left(\begin{matrix}6&-8&3&10\\0&11&-7&-12\\0&0&0&0\end{matrix}\right)\~$$

$$\~\left(\begin{matrix}6&-8&3&10\\0&11&-7&-12\end{matrix}\right)\~$$

Умножим 1-ую строку на (-2). Добавим 1-ую строку к 3-ей. Третью строку вычеркиваем, так как она нулевая.

Полученная матрица имеет размерность 2x4.

Все миноры имеют второй порядок и отличны от нуля, следовательно, rang(A) = 2.

Ответ: rang(A) = 2.

**Задание 5.** Привести систему к системе с базисом методом Жордана- Гаусса и найти одно базисное решение.

$$\left\{\begin{array}{c}2x\_{1}-x\_{2}+2x\_{3}-3x\_{4}+2x\_{5}=10,\\4x\_{1}+3x\_{2}-x\_{3}+x\_{4}-3x\_{5}=5\end{array}\right.$$

**Решение**

Векторы столбцы базисного решения представляют собой единичные векторы и образуют базис, а соответствующие им переменные называются базисными.

Запишем систему в виде:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *x4* | *x5* | *B* |
| **2** | -1 | 2 | -3 | 2 | 10 |
| 4 | 3 | -1 | 1 | -3 | 5 |

Последовательно будем выбирать разрешающий элемент РЭ, который лежит на главной диагонали матрицы.

Разрешающий элемент равен (2). На месте разрешающего элемента получаем 1, а в самом столбце записываем нули. Все остальные элементы матрицы, включая элементы столбца B, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

НЭ = СЭ - (А\*В)/РЭ

РЭ – разрешающий элемент (2), А и В – элементы матрицы, образующие прямоугольник с элементами СЭ и РЭ.

В итоге получаем:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *x4* | *x5* | *B* |
| 1 | -0,5 | 1 | -1,5 | 1 | 5 |
| 0 | **5** | -5 | 7 | -7 | -15 |

Разрешающий элемент равен (5). На месте разрешающего элемента получаем 1, а в самом столбце записываем нули. Все остальные элементы матрицы, включая элементы столбца B, определяются по правилу прямоугольника.

В итоге получаем:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *x4* | *x5* | *B* |
| 1 | 0 | 0,5 | -0,8 | 0,3 | 3,5 |
| 0 | 1 | -1 | 1,4 | -1,4 | -3 |

Запишем общее решение системы:

*x1*= 3,5 - (0,5*x3* – 0,8*x4* + 0,3*x5*)

*x2* = –3 - (– *x3* + 1,4*x4* – 1,4*x5*)

Базисное решение получаем приравниванием переменных *x3, x4, x5* к нулю.

*x1* = 3,5, *x2* = -3, *x3* = 0, *x4* = 0, *x5* = 0.

Ответ: (3,5; -3; 0, 0, 0).

**Задание 6.** Найти два опорных решения канонической системы уравнений.

$$\left\{\begin{array}{c}-8x\_{1}+3x\_{3}+x\_{5}=10\\3x\_{2}-x\_{3}+x\_{4}=3\\x\_{1}+2x\_{2}+4x\_{3}=3\end{array}\right.$$

**Решение**

Опорным решением называется базисное неотрицательное решение.

Решим систему методом Жордана-Гаусса.

Запишем систему в виде:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *x4* | *x5* | *B* |
| -8 | 0 | 3 | 0 | 1 | 10 |
| 0 | 3 | -1 | 1 | 0 | 3 |
| 1 | 2 | 4 | 0 | 0 | 3 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *x4* | *x5* | *B* |
| **1** | 2 | 4 | 0 | 0 | 3 |
| 0 | 3 | -1 | 1 | 0 | 3 |
| -8 | 0 | 3 | 0 | 1 | 10 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***x1*** | *x2* | *x3* | ***x4*** | ***x5*** | *B* |
| 1 | 2 | 4 | 0 | 0 | 3 |
| 0 | 3 | -1 | 1 | 0 | 3 |
| 0 | 16 | 35 | 0 | 1 | 34 |

Запишем общее решение системы:

*x1*= 3 – (2*x2* + 4*x3*)

*x4* = 3 – (3x2 – *x3*)

*x5* = 34 – (16*x2* + 35*x3*)

Базисное решение получаем приравниванием переменных *x2* и *x3* к нулю.

*x1* = 3, *x2* =0, *x3* = 0, *x4* =3, *x5* = 34. Поскольку среди базисного решения нет отрицательных значений, то полученное решение является опорным.

Первое опорное решение (3, 0, 0, 3, 34).

Найдем еще одно опорное решение. Вместо переменной *x4* введем в базис переменную *x3*.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *x4* | *x5* | *B* |
| 1 | 2 | 4 | 0 | 0 | 3 |
| 0 | 3 | **-1** | 1 | 0 | 3 |
| 0 | 16 | 35 | 0 | 1 | 34 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *x4* | *x5* | *B* |
| 1 | 14 | 0 | 4 | 0 | 15 |
| 0 | -3 | 1 | -1 | 0 | -3 |
| 0 | 121 | 0 | 35 | 1 | 139 |

Запишем общее решение системы:

*x1*= 15 – (14*x2* + 4*x4*)

*x3* = –3 – (–3x2 – *x4*)

*x5* = 139 – (121*x2* + 35*x4*)

Базисное решение получаем приравниванием переменных *x2* и *x4* к нулю.

*x1* = 15, *x3* = –3, *x5* = 139. Поскольку среди базисного решения есть отрицательные значения, то полученное решение не является опорным.

Вместо переменной *x3* введем в базис переменную *x2*.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *x4* | *x5* | *B* |
| 1 | 14 | 0 | 4 | 0 | 15 |
| 0 | **-3** | 1 | -1 | 0 | -3 |
| 0 | 121 | 0 | 35 | 1 | 139 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *x4* | *x5* | *B* |
| 1 | 0 | 14/3 | -2/3 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | -1/3 | 1/3 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 121/3 | -16/3 | 1 | 18 |

Базисное решение: *x1* = 1, *x2* = 1, *x3* = 0, *x4* = 0, *x5* = 18. Поскольку среди базисного решения нет отрицательных значений, то полученное решение является опорным.

Второе опорное решение (1, 1, 0, 0, 18).

Ответ: (3, 0, 0, 3, 34), . (1, 1, 0, 0, 18).

**Задание 7.** Найти собственные значения и собственные векторы данной матрицы.

$$A=\left(\begin{matrix}7&2&0\\-2&2&0\\0&2&3\end{matrix}\right)$$

**Решение**

Для нахождения собственных значений составим характеристическое уравнение:

$$\left|\begin{matrix}7-λ&2&0\\-2&2-λ&0\\0&2&3-λ\end{matrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{matrix}7-λ&2&0\\-2&2-λ&0\\0&2&3-λ\end{matrix}\right|=(7-λ)\left(2-λ\right)\left(3-λ\right)+4\left(3-λ\right)=$$

$$=\left(3-λ\right)\left(\left(7-λ\right)\left(2-λ\right)+4\right)=\left(3-λ\right)\left(14-7λ-2λ+λ^{2}+4\right)=$$

$$=\left(3-λ\right)\left(λ^{2}-9λ+18\right)=0$$

$$λ\_{1}=3$$

$$λ^{2}-9λ+18=0$$

$$D=81-72=9$$

$$λ\_{1,2}=\frac{9\pm 3}{2}$$

$$λ\_{2}=3, λ\_{2}=6-собственные значения.$$

Найдем собственные векторы.

$$λ\_{1}=3 $$

$$\left\{\begin{array}{c}\left(7-3\right)x+2y=0\\-2x+\left(2-3\right)y=0\\2y+\left(3-3\right)z=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}4x+2y=0\\-2x-y=0\\2y=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}x=0\\y=0\\z-любое\end{array}\right.$$

Получаем собственный вектор (0; 0; 1).

$$λ\_{2}=6 $$

$$\left\{\begin{array}{c}\left(7-6\right)x+2y=0\\-2x+\left(2-6\right)y=0\\2y+\left(3-6\right)z=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}x+2y=0\\-2x-4y=0\\2y-3z=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}x=-2y\\y-любое\\z=\frac{2}{3}y\end{array}\right.$$

Получаем собственный вектор (-2; 1; 2/3).

**Задание 8.** Даны вершины треугольника АВС. Найти уравнения его сторон и точку пересечения высот.

*А*(7, 3), *B*(4, 6), *C*(1, 0),

**Решение**



Найдем уравнения сторон.

$$AB: \frac{x-x\_{B}}{x\_{A}-x\_{B}}=\frac{y-y\_{B}}{y\_{A}-y\_{B}},,$$

$$ \frac{x-4}{7-4}=\frac{y-6}{3-6},$$

$$ \frac{x-4}{-3}=\frac{y-6}{-3},$$

$$ x-4=y-6,$$

$$ x-y+2=0-уравнени стороны AB$$

$$BC: \frac{x-x\_{B}}{x\_{c}-x\_{B}}=\frac{y-y\_{B}}{y\_{c}-y\_{B}},,$$

$$ \frac{x-4}{1-4}=\frac{y-6}{0-6},$$

$$ \frac{x-4}{-3}=\frac{y-6}{-6},$$

$$ \frac{x-4}{1}=\frac{y-6}{2},$$

$$ 2 x-8=y-6,$$

$$2 x-y-2=0 -уравнени стороны BC$$

$$AC: \frac{x-x\_{C}}{x\_{A}-x\_{C}}=\frac{y-y\_{C}}{y\_{A}-y\_{C}},,$$

$$ \frac{x-1}{7-1}=\frac{y-0}{3-0},$$

$$ \frac{x-1}{6}=\frac{y}{3},$$

$$ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1},$$

$$ x-1=2y,$$

$$ x-2y-1=0-уравнени стороны AC$$

Найдем уравнения высот.

*AD* ┴*BC*: $k\_{AD}=-\frac{1}{k\_{BC}}$

$$k\_{BC}=2 =>k\_{AD}=-\frac{1}{k\_{BC}}=-\frac{1}{2}$$

$$y-y\_{A}=k\_{AD}(x-x\_{A})$$

$$y-3=-\frac{1}{2}(x-7)$$

$$2y-6=-(x-7)$$

$$x+2y-13=0-уравнение высоты AD$$

Найдем уравнения высот.

*BN* ┴*AC*: $k\_{BN}=-\frac{1}{k\_{AC}}$

$$k\_{AC}=\frac{1}{2} =>k\_{BN}=-\frac{1}{k\_{AC}}=-2$$

$$y-y\_{B}=k\_{BN}(x-x\_{B})$$

$$y-6=-2(x-4)$$

$$2x+y-14=0-уравнение высоты BN$$

Точку пересечения высот найдем, решив систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}2x+y-14=0\\x+2y-13=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}y=14-2x\\x+28-4x-13=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}y=14-2x\\-3x=-15\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}x=5\\y=4\end{array}\right.$$

*О*(5, 4)

Ответ:$ x-y+2=0; 2 x-y-2=0; x-2y-1=0; $*О*(5, 4)

**Задание 9.** Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить линию.

$$2x^{2}-8x-y-5=0$$

**Решение**

$$2\left(x^{2}-4x\right)-y-5=0$$

$$2\left(x^{2}-4x+4\right)-8-5-y=0$$

$$2\left(x-2\right)^{2}-13-y=0$$

$$2\left(x-2\right)^{2}=13+y$$

$$\left(x-2\right)^{2}=\frac{1}{2}(y+13)$$

Данное уравнение описывает параболу с вершиной в точке *О*(2; -13).

График линии:



**Задание 10.** Построить график заданной кривой.

$$y=\frac{4x+18}{x+5}$$

**Решение**

Область определения функции $D\left(y\right):x\in \left(-\infty ;-5\right)∪(-5;+\infty )$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| х | у |  |
| -10 | 4,4 |
| -7 | 5 |
| -5,5 | 8 |
| -5 |   |
| -4,5 | 0 |
| -3 | 3 |
| -2 | 3,3 |
| -1 | 3,5 |
| 0 | 3,6 |
| 1 | 3,67 |
| 2 | 3,7 |
| 3 | 3,75 |
| 4 | 3,78 |
| 5 | 3,8 |