

Завдання

Визначити первинні та характеристичні параметри складного чотириполюсника; амплітуду струму й напруги на навантаженні, вхідний опір, вхідний струм, коефіцієнт передачі.

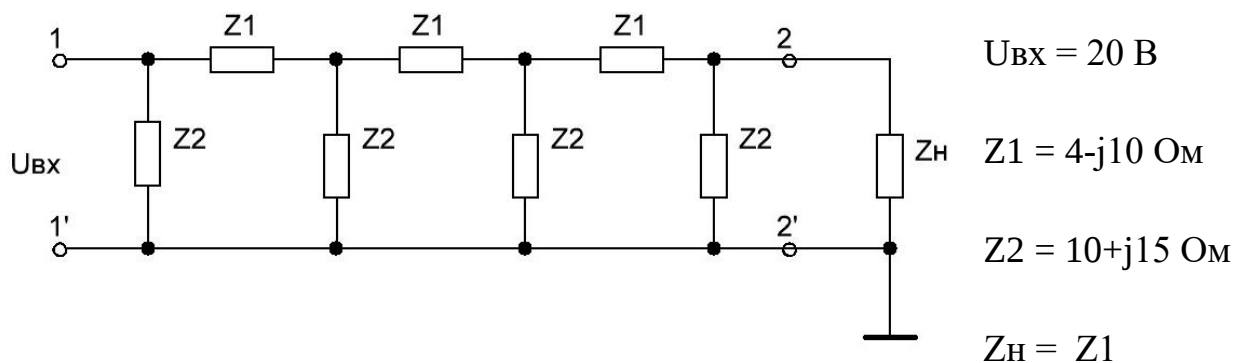


Рисунок 1 – Схема і параметри складного чотириполюсника

Рішення

Для проведення подальших розрахунків запишемо задані опори в показниковій формі:

$$Z_1 = 4 - j10 \text{ Ом} = 10,77e^{-j68,2^\circ} \text{ Ом.}$$

$$Z_2 = 10 + j15 \text{ Ом} = 18,03e^{j56,3^\circ} \text{ Ом.}$$

1) Для знаходження первинних параметрів заданого складного чотириполюсника розіб'ємо його на окремі ланки більш простої структури, для яких виведені формули розрахунку первинних параметрів (коефіцієнтів). В заданій схемі виділимо три касадно з'єднані ланки, з яких перша та третя являють собою П-подібні чотириполюсники з однаковими параметрами (див. рис. 2). Другу ланку будемо розглядати як неповний П-подібний чотириполюсник.

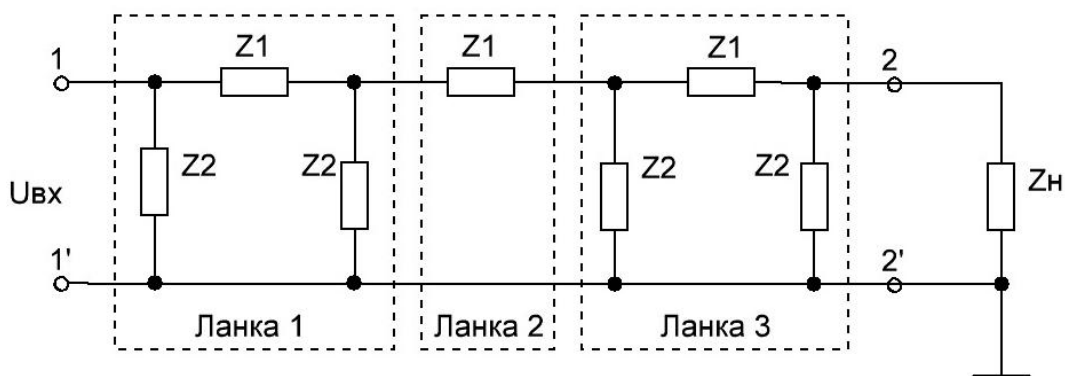


Рисунок 2 – Виділення простих ланок

Оскільки всі ланки схеми з'єднані касадно, то розрахунок первинних параметрів заданого складного чотириполюсника доцільно виконувати по значенням параметрів окремих ланок, записаних в А-формі у вигляді матриць:

$$\|A\| = \|A'\| \cdot \|A''\| \cdot \|A'\|,$$

де $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ – матриця коефіцієнтів А-форми заданого складного чотириполюсника,

$\|A'\|$ – матриця аналогічних коефіцієнтів А-форми для першої (третьої) ланки;

$\|A''\|$ – матриця аналогічних коефіцієнтів А-форми другої ланки.

По відомим формулам розрахуємо коефіцієнти П-подібної ланки (1 і 3) в А-формі:

$$A'_{11} = 1 + \frac{Z1}{Z2} = 1 + \frac{10,77e^{-j68,2^\circ}}{18,03e^{j56,3^\circ}} = 0,825e^{-j36,7^\circ}.$$

$$A'_{12} = Z1 = 10,77e^{-j68,2^\circ}.$$

$$A'_{21} = \frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z1} + \frac{Z1}{Z2 \cdot Z2} = \frac{1}{0,77e^{-j68,2^\circ}} + \frac{1}{0,77e^{-j68,2^\circ}} + \frac{0,77e^{-j68,2^\circ}}{18,03e^{j56,3^\circ} \cdot 18,03e^{j56,3^\circ}}$$

$$A'_{21} = 0,096e^{-j72,8^\circ}.$$

$$A'_{22} = 1 + \frac{Z1}{Z2} = 1 + \frac{10,77e^{-j68,2^\circ}}{18,03e^{j56,3^\circ}} = 0,825e^{-j36,7^\circ}.$$

Матриця коефіцієнтів А-форми П-подібної ланки має вид:

$$A' = \begin{bmatrix} 0,825e^{-j36,7^\circ} & 10,77e^{-j68,2^\circ} \\ 0,096e^{-j72,8^\circ} & 0,825e^{-j36,7^\circ} \end{bmatrix}.$$

По відомим формулам розрахуємо коефіцієнти неповної П-подібної ланки (2) в А-формі:

$$A''_{11} = 1, \quad A''_{12} = Z1 = 10,77e^{-j68,2^\circ}, \quad A''_{21} = 0, \quad A''_{22} = 1.$$

Матриця коефіцієнтів А-форми неповної П-подібної ланки має вид:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 10,77e^{-j68,2^\circ} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обчислимо матрицю коефіцієнтів заданого складного чотириполюсника:

$$\|A\| = \begin{bmatrix} 0,825e^{-j36,7^\circ} & 10,77e^{-j68,2^\circ} \\ 0,096e^{-j72,8^\circ} & 0,825e^{-j36,7^\circ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 10,77e^{-j68,2^\circ} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0,825e^{-j36,7^\circ} & 10,77e^{-j68,2^\circ} \\ 0,096e^{-j72,8^\circ} & 0,825e^{-j36,7^\circ} \end{bmatrix},$$

$$\|A\| = \begin{bmatrix} 1,98e^{-j137,6^\circ} & 24,04e^{-j115,3^\circ} \\ 0,17e^{-j145,2^\circ} & 1,98e^{-j137,6^\circ} \end{bmatrix}.$$

За звичай коефіцієнти чотириполюсника в А-формі позначаються великими латинськими літерами. Виконаємо таку заміну:

$$A = A_{11} = 1,98e^{-j137,6^\circ}.$$

$$B = A_{12} = 24,04e^{-j115,3^\circ}.$$

$$C = A_{21} = 0,17e^{-j145,2^\circ}.$$

$$D = A_{22} = 1,98e^{-j137,6^\circ}.$$

Виконаємо перевірку правильності розрахунків коефіцієнтів по умові:

$$AD - BC = 1,$$

$$AD - BC = (1,98e^{-j137,6^\circ}) \cdot (1,98e^{-j137,6^\circ}) - (24,04e^{-j115,3^\circ}) \cdot (0,17e^{-j145,2^\circ}) = 1$$

Умова виконується, отже розрахунки проведені правильно.

В результаті аналізу отриманих значень первинних параметрів заданого чотириполюсника очевидно, що $A = D$. Це означає, що заданий чотириполюсник є симетричним, для якого заміна місцями його вхідних і вихідних виводів не змінює струми і напруги в решті кола.

2) По отриманим значенням первинних параметрів заданого чотириполюсника виконаємо розрахунок його вторинних параметрів.

Характеристичний опір з боку вхідних контактів 1-1':

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} = \sqrt{\frac{(1,98e^{-j137,6^\circ}) \cdot (24,04e^{-j115,3^\circ})}{(0,17e^{-j145,2^\circ}) \cdot (1,98e^{-j137,6^\circ})}} = 12,07e^{j14,9^\circ} \text{ Ом.}$$

Оскільки заданий чотириполюсник симетричний, то характеристичний опір з боку вихідних контактів 2-2':

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{BD}{AC}} = Z_{01} = 12,07e^{j14,9^\circ} \text{ Ом.}$$

Коефіцієнт трансформації для симетричного чотириполюсника:

$$m_T = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = 1.$$

Характеристичну сталу передачі чотириполюсника обчислимо для випадку його роботи в узгодженому режимі. При цьому опір навантаження дорівнює характеристичному опору з боку вихідних контактів ($Z_H = Z_{02}$), а вхідний опір чотириполюсника дорівнює характеристичному опору з боку вхідних контактів ($Z_{BX} = Z_{01} = Z_H$):

$$g = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}),$$

$$g = \ln(\sqrt{(1,98e^{-j137,6^\circ}) \cdot (1,98e^{-j137,6^\circ})} + \sqrt{(24,04e^{-j115,3^\circ}) \cdot (0,17e^{-j145,2^\circ})}),$$

$$g = \ln(3,97e^{j46,1^\circ}) = \ln(3,97) + \ln(e^{j46,1^\circ}) = 1,38 + j46,1^\circ = \alpha + j\beta.$$

Дійсна частина α – коефіцієнт згасання, який характеризує зміну напруги U_2 чи струму I_2 на виході чотириполюсника, щодо напруги U_1 чи струму I_1 на його вході в узгодженому режимі. Згасання вимірюється в логарифмічних одиницях, як на основі натуральних логарифмів (Нп) так і на основі десятинних логарифмів (дБ):

$$\alpha = 1,38 \text{ Нп.}$$

$$\alpha = 1,38 \cdot 8,686 = 11,97 \text{ дБ.}$$

Уявна частина β – коефіцієнт фази, який дорівнює куту зсуву фаз напруги чи струму на виході чотириполюсника відносно фаз напруги чи струму на його вході в узгодженому режимі. Коефіцієнт фази вимірюється в кутових одиницях:

$$\beta = 46,1^\circ = 0,8 \text{ рад.}$$

3) Визначаємо вхідний опір чотириполюсника при заданому значенні опору навантаження ($Z_H = Z_1$), при якому чотириполюсник працює в неузгодженому режимі:

$$Z_{1BX} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A \cdot U_2 + B \cdot I_2}{C \cdot U_2 + D \cdot I_2} = \frac{A \cdot Z_H + B}{C \cdot Z_H + D},$$

$$Z_{1BX} = \frac{(1,98e^{-j137,6^\circ}) \cdot (10,77e^{-j68,2^\circ}) + 24,04e^{-j115,3^\circ}}{(0,17e^{-j145,2^\circ}) \cdot (10,77e^{-j68,2^\circ}) + 1,98e^{-j137,6^\circ}} = 10,8e^{j15,9^\circ} \text{ Ом.}$$

Вхідний струм чотириполюсника:

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_{1BX}} = \frac{20}{10,8e^{j15,9^\circ}} = 1,85e^{-j15,9^\circ} \text{ А.}$$

Коефіцієнт передачі по напрузі в неузгодженому режимі роботи:

$$K_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_H}{A \cdot Z_H + B},$$

$$K_U = \frac{10,77e^{-j68,2^\circ}}{(1,98e^{-j137,6^\circ}) \cdot (10,77e^{-j68,2^\circ}) + 24,04e^{-j115,3^\circ}} = 0,34e^{j88,9^\circ}.$$

Коефіцієнт передачі по струму в неузгодженому режимі роботи:

$$K_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{C \cdot Z_H + D},$$

$$K_I = \frac{1}{(0,17e^{-j145,2^\circ}) \cdot (10,77e^{-j68,2^\circ}) + 1,98e^{-j137,6^\circ}} = 0,34e^{j173,1^\circ}.$$

По відомим значенням коефіцієнтів передачі розрахуємо вихідну напругу і струм:

$$U_2 = U_1 \cdot K_U = 20 \cdot 0,34e^{j88,9^\circ} = 6,73e^{j88,9^\circ} \text{ В.}$$

$$I_2 = I_1 \cdot K_I = (1,85e^{-j15,9^\circ}) \cdot (0,34e^{j173,1^\circ}) = 0,62e^{j157,1^\circ} \text{ А.}$$

Амплітуди напруги і струму на навантаженні:

$$U_{2m} = \sqrt{2} \cdot |U_2| = 1,41 \cdot 6,73 = 9,52 \text{ В.}$$

$$I_{2m} = \sqrt{2} \cdot |I_2| = 1,41 \cdot 0,62 = 0,88 \text{ А.}$$

Рівняння миттєвих значень напруги і струму на навантаженні:

$$u_2(t) = 9,52 \sin(\omega t + 88,9^\circ) \text{ В.}$$

$$i_2(t) = 0,88 \sin(\omega t + 157,1^\circ) \text{ А.}$$

Перевірка отриманих значень напруг і струмів (в завдання не входить).

Перевірка виконана в програмі схемотехнічного аналізу Micro-Cap (v12).

1) Довільним чином задамо частоту роботи чотириполюсника – $f = 50$ Гц.

2) Будемо вважати, що реактивні складові опорів $Z1$ і $Z2$ задані для прийнятого значення частоти. Це дозволяє розрахувати параметри реактивних елементів схеми.

Для $Z1$:

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot X1} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 10} = 318,3 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 318,3 \text{ мкФ}.$$

Для $Z2$:

$$L = \frac{X2}{2\pi \cdot f} = \frac{15}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} = 47,7 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 47,7 \text{ мГн}.$$

3) За допомогою графічного редактору програми побудуємо схему заданого складного чотириполюсника, використовуючи існуючу бібліотеку умовних графічних позначень елементів.

4) Введемо параметри елементів схеми (опори, індуктивності, ємності та вхідну напругу і частоту).

5) Запустимо динамічний аналіз схеми по змінному струму (Dynamic AC) і отримаємо значення напруг на всіх елементах і струмів у всіх гілках схеми.

