

Ключевые слова: гарантированные оценки, детерминистская динамика цен, суперрепликация, опцион, отсутствие арбитражных возможностей, уравнения Беллмана–Айзекса, многозначное отображение, полунепрерывность, непрерывность, модуль непрерывности, свойство Липшица.

1. Введение

В работе [4] подробно изложен гарантированный детерминистский подход, описаны модель финансового рынка, торговые ограничения и условия безарбитражности, а также поставлена задача суперхеджирования обусловленных обязательств по опционам, приведена соответствующая библиография. Здесь мы ограничимся минимальным описанием необходимых сведений, касающихся постановки задачи, приведенных в [4].

Основной посылкой в предлагаемом подходе является задание “неопределенной” динамики цен посредством предположения об априорной информации о движении цен¹ в момент времени t , а именно, что приращения ΔX_t дисконтированных цен² лежат в априорно заданных компактах $K_t(\cdot)$, где точкой обозначена предыстория цен до момента $t - 1$ включительно, $t = 1, \dots, N$. Обозначим через $v_t^*(\cdot)$ точную нижнюю грань для стоимости портфеля в момент времени t , при известной предыстории, гарантирующей, при определенном выборе допустимой хеджирующей стратегии, исполнение текущих и будущих обязательств, возникающих в отношении возможных выплат по американскому опциону. Соответствующие уравнения Беллмана–Айзекса в дисконтированных ценах возникают непосредственно из экономического смысла посредством выбора на шаге t “наилучшей” допустимой стратегии хеджирования $h \in D_t(\cdot)$ для “наихудшего” сценария $y \in K_t(\cdot)$ приращения (дисконтированных) цен для заданных функций $g_t(\cdot)$, описывающих потенциальные выплаты по опциону.

¹ Приращения берутся “назад”, т.е. $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, где X_t вектор дисконтированных цен в момент времени t .

² Считаем, что безрисковый актив имеет постоянную цену, равную единице.

Таким образом, получаем рекуррентные соотношения:³

$$\begin{aligned} v_N^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_N(\bar{x}_{t-1}), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy], \\ t &= N, \dots, 1, \end{aligned} \tag{BA}$$

где $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1})$ описывает предысторию по отношению к настоящему моменту t . Условия для справедливости (BA) сформулированы в Теореме 3.1 из [4].

При этом удобно (формально) считать, что $g_0 = -\infty$ (отсутствие обязательств по выплатам в начальный момент времени); $g_t \geq 0$ для $t = 1, \dots, N$ в случае американского опциона. Множество $D_t(\cdot)$ предполагается выпуклым и $0 \in D_t(\cdot)$.

Многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$, предполагаются заданными для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t = 1, \dots, N$. Поэтому функции $x \mapsto v_t^*(x)$ задаются уравнениями (BA) для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$.

В уравнениях (BA) функции v_t^* , а также соответствующие точные верхние и нижние грани, принимают значения в расширенном множестве вещественных чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ – двухточечной компактификации⁴ \mathbb{R} . При этом функции v_t^* ограничены сверху благодаря следующему предположению:

$$\begin{aligned} &\text{найдутся константы } C_t \geq 0 \text{ такие, что для каждого } t = 1, \dots, N \\ &\text{и всех возможных траекторий } \bar{x}_t = (x_0, \dots, x_t) \in B_t \text{ выполнено} \\ &g_t(x_0, \dots, x_t) \leq C_t. \end{aligned} \tag{B}$$

Будем считать, что константы C_t выбраны минимальными, т.е.

$$C_t = \sup_{x \in B_t} g_t(x)$$

и будем обозначать

$$C = \bigvee_{t=1}^N C_t. \tag{1.1}$$

³ Знак \bigvee обозначает максимум, $hy = \langle h, y \rangle$ – скалярное произведение вектора h на вектор y .

⁴ Окрестности точек $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид $[\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$ и $(b, +\infty]$, $b \in \mathbb{R}$ соответственно.

Для удобства обозначений мы сделаем «аддитивную» замену в последней переменной функций v_t^* , полагая

$$w(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_1, \dots, x_{t-1}, y) = v^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) \quad (\text{T})$$

и далее будем использовать уравнения Белмана–Айзекса в терминах функций w_t , $t = N, \dots, 0$, т.е в виде:

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy], \quad t = N, \dots, 1.$$

Здесь и далее точкой обозначены “текущие” переменные; в данном случае аргументом является \bar{x}_{t-1} .

Траекторию на временном интервале $[0, t] = \{0, \dots, t\}$ цен активов $(x_0, \dots, x_t) = \bar{x}_t$ мы назовем возможной, если $x_0 \in K_0$, $x_1 \in K_1(x_0)$, \dots , $x_t \in K_t(x_0, \dots, x_{t-1})$; $t = 0, 1, \dots, N$. Обозначим B_t – множество возможных траекторий цен активов на временном интервале $[0, t]$; тем самым

$$B_t = \{(x_0, \dots, x_t) : x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(x_0), \dots, \Delta x_t \in K_t(x_0, \dots, x_{t-1})\}. \quad (1.2)$$

Заметим, что (1.2) равносильно рекуррентным соотношениям⁵

$$\begin{aligned} B_t &= \{(\bar{x}_{t-1}, x_t) : \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})\} = \\ &= \{(\bar{x}_{t-1}, x_t) : \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, x_t \in x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1})\}, \quad t = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Везде далее будем предполагать, что выполнены предположения, перечисленные в Теореме 3.1 из [4], а также предположения, перечисленные в пункте 1) Замечания 3.1 из [4].

В работе [5] изучаются понятия “безарбитражности” для детерминистской модели рынка — отсутствие гарантированного арбитража, отсутствие арбитражных возможностей, отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. Вводится понятие грубости (структурной устойчивости) “безарбитражности”, получены критерии грубости.

В статье [6] исследуются свойства полунепрерывности и непрерывности Белмана–Айзекса (BA). При весьма слабом предположении “безарбитражности” рынка — грубом условии отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью получен основной результат, касающийся “гладкости” решений уравнений (BA).

⁵ Здесь $x + A = \{z : z - x \in A\}$.

В Предложении 2.1 из [6] приведены компактности B_t – достаточно полунепрерывности сверху многозначных отображений $x \mapsto K_t(\cdot)$ (компактнозначного), а также условия для выполнения (B) – в дополнение к полунепрерывности сверху $K_t(\cdot)$ еще и полунепрерывность сверху $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$.

Основные результаты в [6] касаются условий для полунепрерывности сверху и снизу, а также непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса, возникающих в рамках гарантированного детерминистского подхода; наиболее важный из них представлен в Теореме 3.2 (со ссылкой на Теорему 2.7). Для удобства приведем ее здесь полностью.

Теорема 1.1. *Пусть для $t = 1, \dots, N$ числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ непрерывны, компактнозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ непрерывны, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полуценные снизу и замкнуты, и выполнено грубое условие отсутствия гарантированного арбитражса с неограниченной прибылью NDSAUP.*

Тогда:

- 1) функции $\bar{x}_{t-1} \mapsto v_t^*(\bar{x}_{t-1})$, задаваемые соотношениями (BA), непрерывны,
- 2) многозначные отображения $(\bar{x}_{t-1}, h) \mapsto M_t(\bar{x}_{t-1}, h)$, где $M_t(\bar{x}_{t-1}, h)$ – множество максимизаторов $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$, для которых достигается максимум функции

$$(\bar{x}_{t-1}, h) \mapsto \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy],$$

а также многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto N_t(\bar{x}_{t-1})$, где $N_t(\bar{x}_{t-1})$ – множество минимизаторов $h \in D_t(\bar{x}_{t-1})$, для которых достигается минимум функции

$$\bar{x}_{t-1} \mapsto \rho_t(\bar{x}_{t-1}) = \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy],$$

являются полуценными сверху, $t = 1, \dots, N$.

Цель настоящей работы состоит в уточнении этого результата для случая отсутствия торговых ограничений, т.е. когда $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, а именно, оценим модуль непрерывности равномерно непрерывных функций $v_t^*(\cdot)$, включая случай липшицевости. В этом случае условие

RNDSAUP равносильно робастному условию отсутствия арбитражных возможностей *RNDAO* по Теореме 5.1 из [5]; геометрический критерий для *RNDAO* имеет вид:

$$0 \in \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))), \quad t = 1, \dots, N, \quad (1.4)$$

см. Замечание 5.1 в [5].

2. Вспомогательные результаты

Следующее элементарное утверждение будет многократно использоваться далее, поэтому для удобства выделим его в отдельную лемму.

Лемма 2.1. Для числовых функций f и g

$$\left| \sup_A f - \sup_A g \right| \leq \sup_A |f - g|, \quad (2.1)$$

$$\left| \inf_A f - \inf_A g \right| \leq \sup_A |f - g|. \quad (2.2)$$

Доказательство. Обозначим $\gamma = \sup_A |f - g|$. Тогда для всех $x \in X$

$$g(x) - \gamma \leq f(x) \leq g(x) + \gamma,$$

откуда

$$\sup_A g - \gamma \leq \sup_A f \leq \sup_A g + \gamma.$$

т.е. имеет место неравенство (2.1). Аналогично получается (2.2); впрочем, (2.2) получается из (2.1), если выбрать обе функции со знаком минус. \square

В частности, из леммы 2.1 получаем следствие

$$\begin{aligned} \left| \bigvee_{i=1}^n y_i - \bigvee_{i=1}^n y'_i \right| &\leq \bigvee_{i=1}^n |y_i - y'_i| = \|y - y'\|_\infty \\ \left| \bigwedge_{i=1}^n y_i - \bigwedge_{i=1}^n y'_i \right| &\leq \bigvee_{i=1}^n |y_i - y'_i| = \|y - y'\|_\infty \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $y, y' \in \mathbb{R}^n$.

Пусть (X, ρ) и (Y, d) - метрические пространства, $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$. Для функции $f : X \mapsto Y$ и для $\delta \in [0, \infty)$ обозначим

$$\omega_f^E(\delta) = \sup_{x_1, x_2 \in E, \rho(x_1, x_2) \leq \delta} d(f(x_1), f(x_2)),$$

модуль непрерывности функции f на множестве E . Если $E = X$, то будем опускать верхний индекс у модуля непрерывности, т.е. $\omega_f^X(\delta) = \omega_f(\delta)$. Равномерная непрерывность функции f на E означает $\omega_f^E(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Любой модуль непрерывности $\omega_f^E = \omega$, где $\omega : [0, \infty) \mapsto [0, \infty]$, удовлетворяет очевидным свойствам

$$1^0. \omega(0) = 0;$$

$$2^0. \omega \text{ — монотонно неубывающая функция.}$$

В частности, из 1⁰ и 2⁰ следует неотрицательность ω .

Лемма 2.2. Пусть T — топологическое пространство, функция $u : T \mapsto [0, \infty)$ полуценерывна снизу,

$$F(z) = \{x \in T : u(x) \leq z\}$$

задает многозначное отображение⁶, $F : [0, \infty) \mapsto 2^T$, такое что $F(0) \neq \emptyset$, функция $\varphi : T \mapsto \mathbb{R}$ полуценерывна сверху.

Тогда :

1) F принимает непустые замкнутые значения и график F замкнут, а если T — компактно, то многозначное отображение F полуценерывно сверху;

2) если T — компактно, то функция $z \mapsto \sup\{\varphi(x), x \in F(z)\}$, $z \in A$, является монотонно неубывающей непрерывной справа.

Доказательство.

1) Замкнутость множества $F(z)$, $z \in A$ вытекает из полуценерывности снизу функции f . Пусть направленности $z_\alpha \rightarrow z$, $x_\alpha \in F(z_\alpha)$ и $x_\alpha \rightarrow x$; поскольку $x_\alpha \in F(z_\alpha)$ равносильно $u(x_\alpha) \leq z$, то из полуценерывности снизу функции u следует $u(x) \leq \liminf u(x_\alpha) \leq z$, т.е. $x \in F(z)$, и, значит, график F замкнут. Если E компактно, то F полуценерывно сверху по Предложению 2.23 из [10].

2) Числовая функция $\psi : A \mapsto \mathbb{R}$, где $\psi(z) = \sup\{\varphi(x) : x \in F(z)\}$ является монотонно неубывающей в силу монотонности F , т.е. $z \leq z'$ влечет $F(z) \subseteq F(z')$. По теореме Бержа (см. [6], Теорема 2.2) ψ полуценерывна сверху. Для монотонно неубывающей числовой функции полуценерывность сверху равносильна непрерывности справа. \square

⁶ Здесь 2^T — класс всех подмножеств T .

Предложение 2.1. Пусть E – непустое компактное подмножество метрического пространства (X, ρ) , функция $f : X \mapsto Y$, где (Y, d) – метрическое пространство, непрерывна. Тогда модуль непрерывности $\omega_f^E = \omega$ удовлетворяет дополнительным условиям:

3⁰. ω принимает конечные значения;

4⁰. ω непрерывна справа.

Доказательство. Достаточно воспользоваться Леммой 2.2, выбрав $T = E \times E$, для $x = (x_1, x_2) \in E \times E$; $u(x) = u(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$; $A = [0, +\infty)$; $z = \delta$; $\phi(x) = \phi(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$. Тогда многозначное отображение

$$F(\delta) = \{(x_1, x_2) \in E \times E, \rho(x_1, x_2) \leq \delta\}$$

полунепрерывно сверху, функция φ непрерывна и достигает максимума на компакте $F(\delta)$, а, стало быть, функция

$$\psi(\delta) = \max_{x \in F(\delta)} \varphi(x) = \max_{x_1, x_2 \in E, \rho(x_1, x_2) \leq \delta} d(f(x_1), f(x_2)) = \omega_f^E(\delta)$$

является непрерывной справа. \square

Замечание 2.1.

1) Простой пример показывает, что модуль непрерывности в условиях Предложения 2.1 может быть разрывным: достаточно рассмотреть дискретное пространство X с метрикой

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = y, \\ 1 & \text{при } x \neq y. \end{cases}$$

В этом случае любая функция $f : X \mapsto Y$ равномерно непрерывна и

$$\omega_f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } \delta \in [0, 1), \\ 1 & \text{при } \delta \in [1, \infty). \end{cases}$$

2) Дополнительная структура на пространстве X позволяет установить не только непрерывность, но и такое свойство модуля непрерывности, как субаддитивность.

Пусть E – выпуклое подмножество нормированного пространства X с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Фиксируем произвольные δ_1, δ_2 и пусть

$\rho(x, y) = \|x - y\| \leq \delta_1 + \delta_2$. Положим $p = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}$ и $z_p = (1 - p)x + py$, тогда

$$\begin{aligned}\|x - z_p\| &= p\|x - y\| \leq \delta_1, \\ \|z_p - y\| &= (1 - p)\|x - y\| \leq \delta_2.\end{aligned}$$

Поэтому для любых x и y , таких что $\|x - y\| \leq \delta_1 + \delta_2$ имеем неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(z_p)) + \rho(f(z_p), f(y)) \leq \omega_f^E(\delta_1) + \omega_f^E(\delta_2),$$

откуда $\omega_t^E = \omega$ удовлетворяет свойству субаддитивности:⁷

$$5^0. \quad \omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2).$$

3) Функция $\varphi : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$, удовлетворяющая свойствам 1⁰, 2⁰, 3⁰ и 5⁰, имеет модуль непрерывности⁸, совпадающий с этой функцией⁹, т.е. $\omega_\varphi = \varphi$. Действительно, пусть $|t_2 - t_1| \leq \delta$; тогда, используя 2⁰, 3⁰ и 5⁰, получаем

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| = \varphi(t_1 \vee t_2) - \varphi(t_1 \wedge t_2) \leq \varphi(|t_2 - t_1|) \leq \varphi(\delta), \quad (2.4)$$

откуда $\omega_\varphi \leq \varphi$. Обратно, из 1⁰ и 2⁰ следует

$$\omega_\varphi(\delta) \geq |\varphi(\delta) - \varphi(0)| = \varphi(\delta) - \varphi(0) = \varphi(\delta).$$

4) Если, в дополнение к свойствам 1⁰, 2⁰, и 5⁰ модуль непрерывности $\omega_f = \omega$ функции f удовлетворяет¹⁰ свойству 4⁰, то свойство 3⁰ автоматически выполняется, ω совпадает со своим модулем непрерывности и f равномерно непрерывна, что вытекает из неравенства (2.4).

5) Примером равномерно непрерывной, но не абсолютно непрерывной функции $\varphi : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$, удовлетворяющей свойствам 1⁰, 2⁰, 4⁰ и 5⁰ может служить канторова лестница¹¹, см. [7], раздел 3.2.4. При этом функция φ удовлетворяет условию Гёльдера: $\varphi(\delta) = \omega_\varphi(\delta) \leq \delta^\alpha$, $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, см. [9].

⁷ При этом возможно, что $\omega(\delta) = \infty$ для всех $\delta > 0$. Если ω удовлетворяет условиям 1⁰, 2⁰ и 5⁰, то для 3⁰ достаточно конечности $\omega(\delta)$ в одной точке $\delta > 0$.

⁸ Для такой функции φ условия пункта 2) Замечания 2.1 выполняются.

⁹ Похожее утверждение имеется в литературе, см., например § 6 в книге [8], однако там налагаются избыточные требования на φ .

¹⁰ Если, в дополнение к 1⁰ и 2⁰, функция вогнута, то 4⁰ и 5⁰ выполняются.

¹¹ Точнее, продолжение φ функции Кантора $\psi : [0, 1] \mapsto [0, 1]$, полагая $\varphi(\delta) = 1$ при $\delta > 1$.

6) В условиях пункта 2, если выполняется свойство 3^0 , то модуль непрерывности тем самым удовлетворяет 1^0 , 2^0 , 3^0 и 5^0 , а функция ω , удовлетворяющая этим четырем свойствам, асимптотически линейна.¹² Действительно, фиксируем произвольное $t > 0$. напомним, что $\omega \geq 0$ в силу 1^0 и 2^0 . Обозначая через $[a]$ целую часть числа $a \in \mathbb{R}$, для любого $x \in [0, \infty]$ имеем

$$\omega(x) = \omega\left(\left[\frac{x}{t}\right]t + r\right), \quad r = \left(\frac{x}{t} - \left[\frac{x}{t}\right]\right)t \in [0, t);$$

и из субаддитивности (5^0) вытекает

$$\omega(x) = \left[\frac{x}{t}\right]\omega(t) + \omega(r).$$

Поскольку ω монотонно убывает¹³ (2^0) , то

$$\omega(r) \leq \omega(t);$$

из последних двух неравенств получаем

$$\omega(x) \leq \left(\left[\frac{x}{t}\right] + 1\right)\omega(t) \leq \left(\frac{x}{t} + 1\right)\omega(t). \quad (2.5)$$

Далее, стандартные рассуждения, опирающиеся на (2.5), приводят к неравенству¹⁴:

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\omega(x)}{x} \leq \frac{\omega(t)}{t}, \quad t > 0,$$

а в силу произвольности $t > 0$, к неравенствам

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\omega(x)}{x} \leq \inf_{t > 0} \frac{\omega(t)}{t} \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\omega(x)}{x},$$

¹² Это свойство можно назвать непрерывным вариантом леммы Фекете.

¹³ Т.к. аддитивная функция, т.е. решение уравнения Коши, является субаддитивной, то без дополнительных условий получить для субаддитивной функции асимптотическую линейность невозможно, поскольку из аксиомы выбора следует существование неизмеримого решения уравнения Коши, такого что его график всюду плотен на плоскости [11]. Достаточно потребовать ограниченности ω в окрестности точки 0; в нашем случае это вытекает из неотрицательности ω (следствие свойств 1^0 и 2^0) и свойств монотонности 2^0 и конечности 3^0 .

¹⁴ Если функция ω , удовлетворяющая 1^0 и 2^0 , вогнута, то функция $t \rightarrow \frac{\omega(t)}{t}$ является невозрастающей.

т.е. получаем классический результат

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\omega(x)}{x} = \inf_{x>0} \frac{\omega(x)}{x} < +\infty.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\rho(x, A) &= \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}, \\ [A]^\delta &= \{x \in X : \rho(x, A) < \delta\},\end{aligned}$$

расстояние Помпею-Хаусдорфа¹⁵

$$h_\rho(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq [B]^\varepsilon, B \subseteq [A]^\varepsilon\}.$$

Лемма 2.3. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, заданы непустые множества $E \subseteq X$, $A \subseteq E$ и $B \subseteq E$, а также числовая функция $f : E \mapsto \mathbb{R}$.

1) Если $h_\rho(A, B) < \delta$, то

$$|\sup_A f - \sup_B f| \leq \omega_f^E(\delta).$$

2) Если, кроме того f непрерывна на E , компактном подмножестве X , то

$$|\sup_A f - \sup_B f| \leq \omega_f^E(h_\rho(A, B)).$$

Доказательство.

1) Рассмотрим метрическое пространство (E, ρ') , где ρ' – сужение ρ на $E \times E$. Заметим, что для $x \in E$, $A \subseteq E$ имеет место равенство $\rho'(x, A) = \rho(x, A)$. Обозначим $[A]_E^\delta = \{x \in E : \rho(x, A) < \delta\} = [A]^\delta \cap E$. Поскольку для $A \subseteq E$ включение $A \subseteq [B]^\varepsilon$ влечет $A \subseteq [B]^\varepsilon \cap E = [B]_E^\varepsilon$, а включение $A \subseteq [B]_E^\varepsilon$ влечет $A \subseteq [B]^\varepsilon \cap E \subseteq [B^\varepsilon]$, то для $A \subseteq E$ и $B \subseteq E$ расстояние Помпею - Хаусдорфа на E $h_{\rho'}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq [B]_E^\varepsilon, B \subseteq [A]_E^\varepsilon\}$ совпадает с $h_\rho(A, B)$. Поскольку $h_{\rho'}(A, B) < \delta$, то $A \subseteq [B]_E^\delta$ и $B \subseteq [A]_E^\delta$. Для $x \in [A]_E^\delta$ найдется $y \in A$, такое что $\rho(x, y) < \delta$, а значит $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f^E(\delta)$.

Отсюда

$$\sup_{[A]_E^\delta} f \leq \sup_A f + \omega_f^E(\delta);$$

¹⁵ Может быть, что $h_\rho(A, B) = \infty$.

аналогично получаем

$$\sup_{[B]_E^\delta} f \leq \sup_B f + \omega_f^E(\delta).$$

Кроме того,

$$\sup_B f \leq \sup_{[A]_E^\delta} f \leq \sup_A f + \omega_f^E(\delta)$$

и

$$\sup_A f \leq \sup_{[B]_E^\delta} f \leq \sup_B f + \omega_f^E(\delta),$$

откуда следует

$$|\sup_A f - \sup_B f| \leq \omega_f^E(\delta).$$

2) В соответствии с Предложением 2.1, функция ω_f^E полунепрерывна справа, так что из пункта 1) следует пункт 2). \square

Пусть $N \subseteq \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, содержащий начало координат, т.е. $0 \in N$. Опорная функция $\sigma_N(h) = \max_{y \in N} hy$ выпуклого компакта N является выпуклой и конечной для всех $h \in \mathbb{R}^n$, а значит непрерывной (см., например, Следствие 10.1.1 из [12]), поэтому достигает минимума на компактном множестве $S_1(0)$ – единичной сфере в \mathbb{R}^n , т.е. $S_1(0) = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\|_2 = 1\}$, $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма, $\|h\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}$, $h = (h_1, \dots, h_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$.

Обозначим¹⁶

$$r(N) = \min_{h \in S_1(0)} \sigma_N(h) = \min_{h \in S_1(0)} \max_{y \in N} hy. \quad (2.6)$$

Для выпуклого множества N , содержащего точку 0, геометрический смысл $r(N)$ – радиус вписанного шара с центром в 0, т.е. максимальный радиус шара с центром в точке 0, содержащегося в выпуклом компакте N , или, что равносильно, расстояние от точки 0 до границы $\text{bd}(N)$.

Лемма 2.4. *Функция $N \mapsto r(N)$ является липшицевой, с константой Липшица равной единице, на пространстве $\mathcal{K}^*(\mathbb{R}^n)$ непустых выпуклых компактов в \mathbb{R}^n с метрикой Помпео–Хаусдорфа.*

¹⁶ Напомним, что hy обозначает матричное произведение.

Доказательство. В соответствии с Теоремой 14.1 из [2] расстояние Помпею–Хаусдорфа представимо в виде

$$h_\rho(N_1, N_2) = \max_{h \in S_1(0)} |\sigma_{N_1}(h) - \sigma_{N_2}(h)| \quad (2.7)$$

для непустых выпуклых компактов N_1 и N_2 и являются метрикой на $\mathcal{K}^*(\mathbb{R}^n)$. Используя Лемму 2.1 имеем

$$\begin{aligned} |r(N_1) - r(N_2)| &= \left| \min_{h \in S_1(0)} \sigma_{N_1}(h) - \min_{h \in S_1(0)} \sigma_{N_2}(h) \right| \leq \\ &\leq \max_{h \in S_1(0)} |\sigma_{N_1}(h) - \sigma_{N_2}(h)| = h_\rho(N_1, N_2), \end{aligned} \quad (2.8)$$

□

Лемма 2.5. *Пусть K – компакт, многозначное отображение $N : K \mapsto \mathcal{K}^*(\mathbb{R}^n)$ принимает непустые выпуклые компактные значения и полуценпрерывно снизу. Кроме того, предположим, что множества $N(x)$ для всех $x \in X$ удовлетворяют условию ¹⁷ $0 \in \text{int}(N(x))$. Тогда функция $x \mapsto r(N(x))$ полуценпрерывна снизу и $\min_{x \in K} r(N(x)) > 0$.*

Доказательство. Функция $(x, h) \mapsto \sigma_{N(x)}(h) = \max_{y \in N(x)} hy$ полуценпрерывна снизу по теореме Бержа, см. [6], Теорема 2.2'. Далее, отображение $x \mapsto S_1(0)$, принимающее постоянное компактное значение, непрерывно, так что по теореме Бержа, см. [6], Теорема 2.3', функция $x \mapsto r(N(x)) = \min_{h \in S_1(0)} \sigma_{N(x)}(h)$ является полуценпрерывной снизу и достигает минимального значения в некоторой точке $x^* \in K$, для которой $0 \in \text{int}(N(x^*))$, а значит $r(N(x^*)) > 0$. □

Замечание 2.2.

- 1) Если отображение $x \mapsto N(x)$, принимающее компактные выпуклые значения, непрерывно, или, что равносильно, h -непрерывно, то функция $x \mapsto r(N(x))$ непрерывна, что непосредственно вытекает из Леммы 2.4.
- 2) Если $N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $0 \in N$ и $\dim(\text{aff}(N)) < n$, то $r(N) = 0$.

¹⁷ В этом случае аффинная оболочка множества $N(x)$ (совпадающая с линейной оболочкой, т.к. $0 \in N(x)$) равна \mathbb{R}^n .

3) Если для $N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $0 \in N$ определить

$$\tilde{r}(N) = \min_{h \in S_1(0) \cap \text{aff}(N)} \sigma_N(h),$$

т.е. $\tilde{r}(N)$ – расстояние от 0 относительной границы $\text{rbd}(N)$, то $\tilde{r}(N)$ уже не будет непрерывной функцией относительно метрики Помпею-Хаусдорфа в пространстве \mathbb{R}^n . Например, если $0 \in \text{ri}(N)$ и $\dim(\text{aff}(N)) < n$, то $\tilde{r}(N) > 0$ и выбирая $\varepsilon \in (0, \tilde{r}(N))$, получаем, что для $N^\varepsilon = N + \bar{B}_\varepsilon(0)$ выполняется $h_\rho(N, N^\varepsilon) = \varepsilon$ и $\tilde{r}(N^\varepsilon) = r(N^\varepsilon) = \varepsilon$. Разумеется, если сузить пространство \mathbb{R}^n до $E = \text{aff}(N)$ с наследованной евклидовой метрикой и соответствующим расстоянием Помпею-Хаусдорфа, то \tilde{r} станет в таком пространстве уже непрерывной функцией.

3. Оценка модуля непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса

Следующий результат не только является уточнением Теоремы 1.1 для случая отсутствия торговых ограничений, позволяющим оценить модуль непрерывности, но и одновременно позволяет дать альтернативное (прямое) доказательство непрерывности функций v_t^* , $t = 0, \dots, N$ для случая отсутствия торговых ограничений.

Нам удобно считать¹⁸, что в исходной постановке задачи функции $g_t(\cdot)$ и многозначные отображения $K_t(\cdot)$ заданы на всем пространстве $(\mathbb{R}^n)^t$; соответственно, всюду определены функции $v_t^*(\cdot)$, задаваемые (BA) с $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$. В действительности, потребуется задание на множестве возможных траекторий B_t , или, возможно, на некотором выпуклом компактном подмножестве $(\mathbb{R}^n)^t$, содержащем B_t . Зададим норму для $\bar{x}_t \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$ посредством

$$\|\bar{x}_t\| = \sum_{s=0}^t \|x_s\|_1,$$

где

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z^i| \text{ для } z = (z^1, \dots, z^n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

¹⁸ По крайней мере, в отношении функций потенциальных выплат g_t , $t = 1, \dots, N$ это не только удобно, но и естественно – обычно именно так ставится задача на практике.

Обозначим

$$\begin{aligned} C_t^* &= \bigvee_{s=t}^N C_s, \quad C_t = \sup_{\bar{x}_{t-1} \in B_t} g_t(\bar{x}_{t-1}); \\ K_t^*(\cdot) &= \text{conv}(K_t(\cdot)); \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$r_t^* = \inf_{x \in B_{t-1}} r(K_t^*(x)), \quad t = 1, \dots, N.$$

где r — функция, определенная формулой (2.6).

Теорема 3.1. Пусть выполнено робастное условие отсутствия арбитражных возможностей $RNDAO$, функции потенциальных выплат g_t $t = 1, \dots, N$ непрерывны, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t = 1, \dots, N$ h -непрерывны (непрерывность для метрики Помпею–Хаусдорфа¹⁹). Тогда функции v_t^* , заданные посредством (ВА) с $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, равномерно непрерывны,

$$0 \leq v_t^* \leq C_t^* < \infty, \quad t = 0, \dots, N \tag{3.2}$$

и имеет место оценка модуля непрерывности $\omega_{v_t^*}$ функций v_t^* :

$$\begin{aligned} \omega_{v_{t-1}^*}^{B_{t-1}}(\delta) &\leq \omega_{g_{t-1}}^{B_{t-1}}(\delta) \vee [\omega_{v_t^*}^{B_t}(\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)) + \frac{C_t^*}{r_t^*} \omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta) + \omega_{v_t^*}^{B_t}(\delta)], \quad t = 1, \dots, N; \\ \omega_{v_N^*}^{B_N} &= \omega_{g_N}^{B_N}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где формально полагаем $g_0 \equiv 0$ (и $\omega_{g_0} \equiv 0$), $\omega_{K_t}^{B_{t-1}}$ — модуль непрерывности $K_t(\cdot)$ в метрике Хаусдорфа на B_{t-1} , $\omega_{g_t}^{B_t}$ и $\omega_{v_t^*}^{B_t}$ — модули непрерывности функций g_{t-1} и v_t^* , соответственно, на B_t , причем величины r_t^* , задаваемые посредством (3.1), являются положительными, $t = N, \dots, 1$.

Доказательство. Утверждение о непрерывности функций v_t^* вытекает из Теоремы 1.1, учитывая также, что для компактнозначных отображений $K_t(\cdot)$ полунармированность и h -полунармированность (снизу или сверху) суть одно и то же, см. Предложение 2.68 из [10]. Поскольку, в соответствии с Предложением 2.1 из [6], множество возможных траекторий B_t является компактным, функции v_t^* на B_t являются равномерно непрерывными и ограниченными.

¹⁹ Для компактнозначных отображений h -непрерывность равносильна непрерывности, см. Теорему 2.68 из [10].

Впрочем, для рассмотренного случая отсутствия торговых ограничений, непрерывность функций v_t^* также получается по индукции непосредственно (из рассуждений, приведенных ниже), одновременно с оценкой модулей непрерывности и неравенствами (3.2). Проверим выполнение (3.2) и (3.3) по индукции. Для $s = N$ это очевидно. Пусть v_s^* равномерно непрерывна для $s = N, \dots, t$; проверим, что v_{t-1}^* равномерно непрерывна и выполняются (3.2) и (3.3). В соответствии с (BA) для случая отсутствия торговых ограничений, т.е. $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, уравнения для $t = N, \dots, 1$ принимают вид

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \rho_t(\bar{x}_{t-1}), \quad (3.4)$$

где

$$\rho_t(\bar{x}_{t-1}) = \inf_{h \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \quad (3.5)$$

Поскольку, по предположению теоремы, функции g_{t-1} непрерывны, то они равномерно непрерывны и ограничены на компакте B_t возможных траекторий, в частности, $C_t < \infty$.

Поскольку $v_{t-1}^*(\cdot) \geq g_{t-1}(\cdot)$, то $v_s^*(\cdot) \geq 0$ для $s = t-1, \dots, N$. Так как, по предположению индукции, $v_t^*(\cdot) \leq C_t^*$, а точная нижняя грань по h в (3.5) не превосходит значения точной верхней грани по y при $h = 0$, то $\rho_t(\cdot) \leq C_t^*$ и имеют место неравенства $v_{t-1}^*(\cdot) \leq C_{t-1} \vee C_t^* = C_{t-1}^*$. Тем самым, неравенства (3.2) установлены.

Покажем теперь равномерную непрерывность функции $\bar{x}_{t-1} \mapsto \rho_t(\bar{x}_{t-1})$ и одновременно оценим ее модуль непрерывности.

Поскольку непрерывное отображение компактного метрического пространства в метрическое пространство равномерно непрерывно (см., например, [1]), Теорема 3.16.5), а с учетом Теоремы 5.1 из [3], класс всех компактных подмножеств \mathbb{R}^n является метрическим пространством для метрики, равной расстоянию Помпею–Хаусдорфа, то отображение $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, рассматриваемое как однозначное, равномерно непрерывно на B_{t-1} ; обозначая через $\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\cdot)$ – модуль непрерывности отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, имеем $\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

По предположению индукции функция $v_t^*(\cdot)$ равномерно непрерывна, так что модуль ее непрерывности $\omega_{v_t^*}(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Пусть $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$, $\bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$, $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| \leq \delta$. Имеют место

неравенства

$$\begin{aligned}
 & \left| \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y) - hy] \right| \leq \\
 & \leq \left| \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] \right| + \\
 & + \left| \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y) - hy] \right|.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Чтобы оценить первое слагаемое в правой части неравенства (3.6), заметим, что модуль непрерывности в точке $\varepsilon \geq 0$ функции $y \mapsto v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$ можно оценить сверху величиной $\omega_{v_t^*}^{B_t}(\varepsilon) + \|h\|\varepsilon$. Далее, используя Лемму 2.3, пункт 2), получаем, что первое слагаемое оценивается сверху величиной

$$\begin{aligned}
 & \omega_{v_t^*}(h_\rho(K_t(\bar{x}_{t-1}), K_t(\bar{x}'_{t-1}))) + \|h\|h_\rho(K_t(\bar{x}_{t-1}), K_t(\bar{x}'_{t-1})) \leq \\
 & \leq \omega_{v_t^*}^{B_t}(\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)) + \|h\|\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta).
 \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части неравенства (3.6), с использованием Леммы 2.1, оценивается сверху величиной

$$\sup \{|v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y)|, y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})\} \leq \omega_{v_t^*}^{B_t}(\delta).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 & \left| \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y) - hy] \right| \leq \\
 & \leq [\omega_{v_t^*}^{B_t}(\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)) + \|h\|\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)] + \omega_{v_t^*}(\delta)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

для всех $\bar{x}_{t-1}, \bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$, таких что $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| < \delta$.

По Предложению 5.2 из [3], формула (5.12), в случае, когда метрика ρ порождена нормой на E , т.е. $\rho(x, y) = \|x - y\|$, для расстояния Помпею-Хаусдорфа имеет место неравенство²⁰

$$h_\rho(\text{conv}(A_1), \text{conv}(A_2)) \leq h_\rho(A_1, A_2). \tag{3.8}$$

Поэтому отображение $B_{t-1} \ni \bar{x}_{t-1} \mapsto K_t^*(\bar{x}_{t-1}) = \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))$ непрерывно, и более того, равномерно непрерывно с тем же модулем непрерывности, что и многозначное отображение $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$. С тем

²⁰ Здесь $\text{conv}(A)$ – выпуклая оболочка A .

же модулем непрерывности будет непрерывна и функция $B_t \ni \bar{x}_{t-1} \mapsto r(K_t^*(\bar{x}_{t-1}))$, в силу Леммы 2.4. По Лемме 2.5 непрерывная функция $\bar{x}_{t-1} \mapsto r(K_t^*(\bar{x}_{t-1}))$ достигает минимума для некоторого $\bar{x}_{t-1}^* \in B_{t-1}$ и $r(K_t^*(\bar{x}_{t-1}^*)) = r_t^* > 0$, где функция r определена посредством (2.6).

Справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] &\geq \max_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (-hy) = \max_{y \in -K_t^*(\bar{x}_{t-1})} hy = \\ &= \sigma_{-K_t^*(\bar{x}_{t-1})}(h) \geq \sigma_{B_{r_t^*}(0)}(h) = r_t^* \|h\|_2, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма в \mathbb{R}^n . Поэтому при $\|h\|_2 > \frac{C_t^*}{r_t^*}$ имеет место неравенство

$$\sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] > C_t^*,$$

так что точная нижняя грань в (3.5) не может достигаться для таких h , т.е.

$$\begin{aligned} \rho_t(\bar{x}_{t-1}) &= \inf_{h \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] = \\ &= \inf_{h \in B_{C/r_t^*}(0)} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] = \inf_{h \in B_{C/r_t^*}(0)} \varphi_t(\bar{x}'_{t-1}, h), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$\varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h) = \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy].$$

Учитывая (3.7), неравенства

$$|\varphi_t(\bar{x}'_{t-1}, h) - \varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h)| \leq \beta(\delta), \tag{3.10}$$

где

$$\beta(\delta) = \omega_{v_t^*}^{B_t}(\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)) + \frac{C_t^*}{r_t^*} \omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta) + \omega_{v_t^*}^{B_{t-1}}(\delta), \tag{3.11}$$

имеют место для любых $\bar{x}_{t-1}, \bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$, таких что $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| < \delta$ и всех $h \in B_{C/r_t^*}(0)$. Из (3.9), (3.10) и (3.11), а также Леммы 2.1 следует неравенство

$$|\rho_t(\bar{x}'_{t-1}) - \rho_t(\bar{x}_{t-1})| \leq \beta(\delta) \tag{3.12}$$

для всех $\bar{x}_{t-1}, \bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$, таких что $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| < \delta$. Поскольку v_t^* и K_t равномерно непрерывны, то $\beta(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$; таким образом, функция ρ_{t-1} равномерно непрерывна, с модулем непрерывности

$$\omega_{\rho_t}^{B_{t-1}}(\delta) = \beta(\delta). \quad (3.13)$$

Поскольку $v_{t-1}^* = g_{t-1} \vee \rho_t$, то с использованием следствия (2.3) из Леммы 2.1 имеем для $\delta \geq 0$:

$$\omega_{v_{t-1}^*}^{B_{t-1}}(\delta) \leq \omega_{g_{t-1}}^{B_{t-1}}(\delta) \vee \omega_{\rho_t}^{B_{t-1}}(\delta). \quad (3.14)$$

Наконец, из (3.11), (3.13) и (3.14) вытекают требуемые неравенства (3.3). \square

Из доказанной теоремы легко получается следующее утверждение.

Теорема 3.2. Пусть выполнено условие RNDAO, функции g_{t-1} и $K_t(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица с константами L_{g_t} и L_{K_t} соответственно, тогда функции Беллмана v_t^* также удовлетворяют условиям Липшица с константами L_{v_t} , которые могут быть определены из следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} L_{v_N^*} &= L_{g_N}, \\ L_{v_{t-1}^*} &= L_{g_{t-1}} \vee [L_{v_t^*}(L_{K_t} + 1) + \frac{C_t^*}{r_t^*} L_{K_t}], \quad t = N, \dots, 1. \end{aligned}$$

где $C_t^* = \bigvee_{s=t}^N C_s$, $C_t = \sup_{\bar{x}_{t-1} \in B_t} g_t(\bar{x}_{t-1})$, $t = N, \dots, 1$, а r_t^* определяется посредством (3.1), $t = N, \dots, 1$.

Доказательство. Равенство $L_{v_N^*} = L_{g_N}$ очевидно. Используя формулы (3.1) и (3.3), а также липшицевость g_{t-1} и $K_t(\cdot)$, т.е.²¹

$$\begin{aligned} \omega_{g_{t-1}}(\delta) &\leq L_{g_t} \delta, \\ \omega_{K_{t-1}}(\delta) &\leq L_{K_t} \delta, \end{aligned}$$

получаем требуемый результат. \square

²¹ Здесь константы Липшица можно считать выбранными минимальными, т.е. $L_{g_{t-1}} = \sup\{\omega_{g_{t-1}}(\delta)/\delta, \delta > 0\}$, $L_{K_{t-1}} = \sup\{\omega_{K_{t-1}}(\delta)/\delta, \delta > 0\}$.

Замечание 3.1.

1) Для того, чтобы был применим пункт 2) Замечания 2.1, достаточно в Теореме 3.1 расширить множество B_t , на котором определяются модули непрерывности, до выпуклой оболочки $\text{conv}(B_t)$; для некоторых моделей B_t является выпуклым множеством, $t = 0, \dots, N$. В частности, это выполняется для мультипликативной модели рынка, описанной ниже.

2) В условиях пункта 2) замечания 2.1 для липшицевости функции f достаточно (и необходимо), чтобы для модуля непрерывности $\omega_f^E(\delta) = \omega(\delta)$ выполнялось

$$a = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(\delta)}{\delta} < \infty,$$

причем $\omega(\delta) \leq a\delta$ для всех $\delta \in [0, \infty)$, т.е. a – константа Липшица.

Действительно, функция f равномерно непрерывна на E , поскольку $\omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда найдется $\delta^* = \delta^*(\varepsilon) > 0$, такое что $\omega(\delta) \leq (a + \varepsilon)\delta$ при $\delta \in [0, \delta^*]$. Из неравенства (2.5) следует, что при $x \geq t > 0$

$$\frac{\omega(x)}{x} \leq \left(1 + \frac{t}{x}\right) \frac{\omega(t)}{t}; \quad (3.15)$$

выбирая в (3.15) $x > \delta^*$ и $t < \varepsilon\delta^*$ получаем, что $\sup_{x>0} \frac{\omega(x)}{x} \leq (a + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$.

В силу произвольности ε заключаем, что a – константа Липшица.

3) Результат Теоремы 3.2 может быть полезен, в частности, для оценки точности численного решения задачи, в случае, когда имеется дополнительное более сильное, чем непрерывность, свойство “гладкости” функций и многозначных отображений – липшицевость. Отметим, что липшицевость функций потенциальных выплат – вполне реалистичное предположение, выполняющееся для многих видов опционов. Исключение составляют бинарные опционы²². В приведенном ниже Предложении 3.1 доказывается липшицевость многозначных отображений для мультипликативной модели.

Рассмотрим модель, относящуюся к мультипликативно-независимому типу и однородную по времени,²³ где мультипликативные факторы

²² По английски “binary” или “digital”.

²³ Эта терминология введена в [4].

M_t , определяющие динамику цен посредством мультипликативного представления:

$$X_t^i = M_t^i X_{t-1}^i, \quad M_t = (M_t^1, \dots, M_t^n) \in C_t(\cdot), \quad t = 1, \dots, N, \quad (3.16)$$

где $C_t(\cdot)$ – непустое компактное подмножество \mathbb{R}^n ; неопределенные величины M_t^i назовем мультипликативными факторами. Для $M_t = (M_1, \dots, M_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $\Lambda(M)$ диагональную матрицу вида

$$\Lambda(M)_{ij} = \begin{cases} M_i, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

тогда (3.16) можно записать в матричном виде:

$$X_t = \Lambda(M_t) X_{t-1}. \quad (3.17)$$

Очевидно, приращения цен $Y_t = \Delta X_t$ связаны с мультипликативным представлением соотношениями

$$Y_t = [\Lambda(M_t) - I] X_{t-1}, \quad t = 1, \dots, N,$$

где I – единичная матрица;

$$K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = [\Lambda(m) - I] x_{t-1}, m \in C_t(x_0, \dots, x_{t-1})\}.$$

Предложение 3.1. Пусть $C_t(\cdot) \equiv \check{C}$, где \check{C} – непустое компактное выпуклое подмножество \mathbb{R}^n . Тогда многозначное отображение, принимающее компактные выпуклые значения

$$\begin{aligned} x = (x^1, \dots, x^n) &\mapsto K(x) = \\ &= \{y = (y^1, \dots, y^n) : y^i = (M^i - 1)x^i, i = 1, \dots, n, M = (M^1, \dots, M^n) \in \check{C}\} \end{aligned}$$

удовлетворяет условию Липшица относительно метрики Помпею-Хаусдорфа.

Доказательство. В самом деле, обозначим $L^i = M^i - 1$; тогда, с учетом (3.17), $y \in K(x)$ равносильно $y^i = L^i x^i$, $i = 1, \dots, n$, где $L \in C' = \check{C} - e$, $e = (1, \dots, 1)$. Опорная функция

$$\sigma_{K(x)}(z) = \sup_{y \in K(x)} \sum_{i=1}^n z^i y^i = \sup_{L \in C'} \sum_{i=1}^n z^i L^i x^i = \sigma_{C'}((z^1 x^1, \dots, z^n x^n)) = \sigma_{C'}(\Lambda(z)x), \quad (3.18)$$

где $\Lambda(z)$ – диагональная матрица:

$$\Lambda(z)_{ij} = \begin{cases} z^i, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Пусть ρ – евклидова метрика на \mathbb{R}^n , т.е. $\rho(a, b) = \|a - b\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a^i - b^i)^2}$; тогда отвечающая ρ метрика Помпею-Хаусдорфа h_ρ на пространстве выпуклых компактов представима в виде

$$h_\rho(A, B) = \max_{z: \|z\|_2=1} |\sigma_A(z) - \sigma_B(z)|, \quad (3.19)$$

см., например, [3], Предложение 9.12. Поэтому, с учетом (3.18) и (3.19),

$$\begin{aligned} h_\rho(K(x), K(x')) &= \max_{z: \|z\|_2=1} |\sigma_{K(x)}(z) - \sigma_{K(x')}(z)| = \max_{z: \|z\|_2=1} |\sigma_{C'}(\Lambda(z)x) - \sigma_{C'}(\Lambda(z)x')| \leq \\ &\leq \|C'\|_2 \sup_{z: \|z\|_2=1} \|\Lambda(z)\|_2 \|x - x'\|_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \|C'\|_2 &= \sup_{a \in C'} \|a\|_2 < \infty, \\ \|\Lambda(z)\|_2 &= \max_{x: \|x\|_2=1} \|\Lambda(z)x\| = \bigvee_{i=1}^n |z^i| = \|z\|_\infty. \end{aligned}$$

Здесь используется тот факт, что опорная функция σ_A является липшицевой с константой $\|A\|_2$, см. [3], Предложение 9.10. Таким образом, с учетом соотношения норм $\|z\|_\infty \leq \|z\|_2 \leq \|z\|_1$, получаем

$$h_\rho(K(x), K(x')) \leq \|C'\|_2 \|x - x'\|,$$

т.е. многозначное отображение $x \mapsto K(x)$ является липшицевым с константой Липшица $L_{K_t} = \|C'\|_2$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Дьедонне Ж. Основы современного анализа. Перевод с англ. М.: Издательство "Мир". 1964. 430 с.