**§ 6. Модифіковані циліндричні функції (циліндричні функції уявного аргумента)**

Якщо у рівнянні (2) *z* замінити на, ξ = i*z* то ми отримаємо рівняння

*z2ω``+ zω` - (z2 + ) ω = 0,* (57)

в якому диференціювання відбувається за змінною *z*.

Нетривіальні розв’язання рівняння (57) також відносять до циліндричних функцій. Їх називають також *модифікованими циліндричними функціями*.

1. Визначимо найбільш вживані із них. Вважаємо

I (*z*) *J (z), (58)*

*K (z) H (z). (59)*

Із лінійної незалежності функцій (*z*) і H (*z*) слідує лінійна незалежність функцій *I (z)* і K (*z*). Вони є рішеннями рівняння (57). Функції I (*z*) часто називають функціями Бесселя уявного аргумента, а К (*z*) - функціями Макдональда. Із формул (58) і (5) безпосередньо слідує, що

I (*z*) =

В області < arg *z* < функція I (*z*) однозначна та аналітична повсюди. Якщо - цілісне число ( = *n*), то I (*z*) - цілісна функція. Із лінійної незалежності функцій I (*z*) і K (*z*) i з теореми 1 слідує, що в окружності *z = 0* функція K (*z*) поводить себе, як A*z,* якщо 0, і як A ln *z*, якщо = 0.

Із формул (16), (17) та (19) безпосередньо слідують співвідношення

*zI - zI*

*I + (z) I (z), I (z)I (z)+ I (z)*

Із (42) та (43) отримуємо

K (*z*) -K (*z*) K (*z*)

 -2K (*z*) K (*z*) + K (*z*) \*)

Із теорем про нулі функцій Бесселя слідує, що кожна функція I (*z*) має безкінечно багато нулів. Всі вони прості, крім, можливо, z = 0, і чисто уявні.

1. В додатках зустрічаються також наступні циліндричні функції:

ber (*z*), bei (*z*), ker (*z*), kei (*z*).

Для речових значень аргумента x вони визначаються наступним чином:

ber (x) = Re bei (x) = Im (60)

ker (x) = Re kei (x) = Im (61)

а після аналітично продовжуються на всю площину змінної z.

Із цих визначень легко вивести властивості, аналогічні відповідним властивостям функцій I (*z)* і K (*z*). Читач легко може зробити це самостійно.

Наведемо уявлення деяких із цих функцій ступеневими рядами:

ber (*z*) = (-1) (64)

bei (*z*) = (-1) (65)

Е |y| - ціла частина числа y.

**§ 7. Асимптотичні уявлення циліндричних функцій.**

1. У багатьох задачах із фізики вимагається вивчати вже встановлені режими явищ. Математично це призводить до вивчення поведінки функцій при великих значеннях аргументів - до вивчення асимптотичної поведінки функцій при прагненні їх аргументів до безкінечності. По суті, знайти асимптотичну поведінку функції f(x) при прагненні x до безкінечності - означає знайти простішу функцію x, що мало чим відрізняється (у певному сенсі) від функції f(x) при достатньо великих значеннях змінної х. Часто в якості таких простих функцій використовують суми

с0 +$\frac{c1}{z}$ + + … +

В и з н а ч е н н я.

Ряд с0 + + … + + … називають асимптотичним розкладанням функції на множині , утримуючій послідовності,що сходяться до безкінечності, якщо

Lim zn (z) -$ f\left(z\right)\sum\_{k=0}^{n}z^{k}$ = 0 для n = 0, 1, 2, …

Вживають запис:

або

Легко показати, що якщо асимптотичне розкладання існує, то воно єдине.

Насправді, із визначення слідує, що при , звідки . При маємо , звідки .

Проте різноманітні функції можуть мати одне й те ж саме асимптотичне розкладання. Дійсно, якщо,

то й

Якщо

то

будемо називати асимптотичним представленням функції. Зазвичай асимптотичні розкладення

є розбіжними рядами.

1. Знайдемо асимптотичне представлення інтеграла помилок

при великих х > 0. Очевидно,

Тому достатньо знайти асимптотичне представлення функції . Маємо

Застосовуючи декілька разів інтегрування по частинах, отримаємо

Для залишку

отримуємо оцінку

Як наслідок,

і

Відмітимо, що асимптотичне розкладення функції , тобто ряд

є розходящимся всюди поряд.

1. Для асимптотичних представлень циліндричних функцій при великих позитивних значеннях змінної х справедлива наступна теорема.

Т Е О Р Е М А. Будь-яке речове рішення рівняння

при великих позитивних значеннях змінної х має асимптотичне представлення виголяду

де і - константи, що залежать, загально кажучи, від параметра .

Д О К А З. Введемо в розгляд функцію по формулі

Для отримаємо диференціальне рівняння

При великих значеннях х це рівняння мало чим відрізняється від рівняння

загальне рішення якого має вигляд

де і - константи.

Тому при великих значеннях х будемо шукати рішення рівняння (67) у вигляді

де і - шукані функції.

Варто очікувати, що А та будуть повільно змінюваними функціями при великих значеннях х (х > 0), близькими до постійних значень.

Оскільки шуканих функцій дві, а пов’язані вони лише однією умовою (вимогою, щоб А (х) задовольняла рівняння (67)), ми можемо підкорити їх іще одній умові. Оберемо цю умову таким чином, щоб похідна від у вираховувалася таким чином, ніби А (х) і були константами. Оскільки

то вважаємо

Тоді

Вираховуючи похідну і підставляючи її у рівняння отримаємо

де

Виключаючи із співвідношень (69) і (71) А та А’, отримаємо

звідки

При фіксованому х та при права частина формули має межу; відповідно, і ліва частина має межу

Таким чином, маємо

Але

тому

Зі співвідношень (69) та (72) знаходимо

і, як наслідок,

Повторяючи роздуми, проведені для і , приходимо до висновку, що існує межі

і

Відповідно,

Тому

і

Таким чином, достатньо простий аналіз рівняння (2) дозволив нам отримати уявлення про характер поведінки речових циліндричних функцій при великих позитивних значеннях змінної х. Але при цьому ми не змогли визначити числа і . Очевидно, отриманий результат справедливий для функцій Бесселя і функцій Неймана. Але він не застосовний до функцій Ганкеля.

1. Звернімось до розгляду функцій Ганкеля. Для визначеності всі роздуми та викладки будемо проводити для функції . Поставимо задачу отримати асимптотичне представлення для при великих позитивних значеннях змінної z. Будемо вважати, що - фиксоване число і .

Згідно з формулою (40) можна записати у вигляді

де

Тут - нижня частина контура,