

Русский оригинал

В предыдущем пункте, решая две разные задачи о мгновенной скорости материальной точки и об угловом коэффициенте касательной, мы пришли к одной и той же математической модели – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1)$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (2)$$

К аналогичным формулам приводит решение целого ряда задач физики, химии, биологии, экономики и других наук. Это свидетельствует о том, что рассматриваемая модель заслуживает особого внимания. Ей стоит присвоить название, ввести обозначение, изучить её свойства и научиться их применять.

Определение. Производной функции f в точке x_0 называют число, равное пределу отношения приращения функции f в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Производную функции $y=f(x)$ в точке x_0 обозначают так: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$.

Исходя из определения мгновенной скорости (1), можно сделать следующий вывод: если $y=s(t)$ – закон движения материальной точки по координатной прямой, то её мгновенная скорость в момент t_0 равна значению производной функции $y=s(t)$ в точке t_0 , то есть

$$v(t_0) = s'(t_0)$$

Это равенство выражает **механический смысл производной**.

Исходя из формулы для углового коэффициента касательной (2), можно сделать следующий вывод: угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0 , равен значению производной функции f в точке x_0 , то есть

$$k(x_0) = f'(x_0)$$

Это равенство выражает **геометрический смысл производной**.

Если функция f имеет производную в точке x_0 , то эту функцию называют **дифференцируемой в точке x_0** .

Если функция дифференцируема в каждой точке области определения, то её называют **дифференцируемой**.

Операцию нахождения производной функции f называют **дифференцированием** функции f .

English translation

In the previous chapter, while solving two different problems about the instantaneous velocity of a mass point and the slope of a tangent, we came to the same mathematical model – the limit of the ratio between the increment of the function and the increment of its argument, provided the latter approaches zero.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1)$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (2)$$

Solving a whole range of problems in physics, chemistry, biology, economy, and other sciences, one comes to analogous formulas. This indicates that the model in question deserves particular attention. One should name it, introduce a designation for it, study its properties, and learn how to apply them.

Definition. The derivative of a function at the point x_0 is a number equal to the limit of the ratio between the increment of the function at the point x_0 and the corresponding increment of the argument, provided the increment of the argument approaches zero.

The derivative of a function $y=f(x)$ at the point x_0 is designated as follows: $f'(x_0)$ or $y'(x_0)$.

From the definition of an instantaneous velocity (1), one may draw the following conclusion: if $y=s(t)$ is the law of motion of a mass point along the coordinate line, then the point's instantaneous speed at the time moment t_0 is equal to the measure of the derivative of the function $y=s(t)$ at the point t_0 , that is

$$v(t_0) = s'(t_0)$$

This equation expresses **the mechanical essence of the derivative**.

From the expression for determining a slope of a tangent (2), one may draw the following conclusion: a slope of a tangent to the graph of the function f at the point with the abscissa x_0 is equal to the measure of the derivative of the function f at the point x_0 , that is

$$k(x_0) = f'(x_0)$$

This equation expresses **the geometrical essence of the derivative**.

If a function f does have a derivative at the point x_0 , then this function is called **differentiable at the point x_0** .

If a function is differentiable at every point from its domain, then it is called **differentiable**.

The process of computing a derivative of a function f is called a **differentiation** of the function f .