Пункти постачання \ Пункти призначення	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	**3**	**1** 53	**3**	**4**	**3** 12	**65**
A_2	**2** 27	**3**	**1** 21	**2** 20	**3**	**68**
A_3	**3**	**5**	**2**	**2** 22	**4** 18	**40**
Потреби	**27**	**53**	**21**	**42**	**30**	$\Sigma = 173$

► Спочатку серед клітинок із найменшою собівартістю перевезень (клітинки (1;2), (2;3)) заповнюємо довільну, наприклад, спочатку (1;2), а потім — (2;3). Наступна мінімальна вартість перевезень є у клітинках (2;1), (2;4), (3;3), (3;4), але заповнити можна тільки (2;1), (2;4), (3;4), оскільки потреби споживача B_3 задоволені повністю. Заповнювати клітинки (2;1), (2;4) потрібно, врахо-вуючи запаси постачальника A_2 , а клітинку (3;4) — потреби споживача B_4 . Поточна мінімальна вартість 3 од. знаходиться у клітинках (1;1), (1;3), (1;5), (2;2), (2;5), (3;1), а заповнити можемо лише клітинку (1;5) (65-53=12). Далі заповнюємо клітинку (3;5) із собівартістю 4 одиниці (30-12=18). Отже, опорний план має вигляд

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 53 & 0 & 0 & 12 \\ 27 & 0 & 21 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 18 \end{pmatrix}.$$

,

$$m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7,$$

$$L_0 = 1 \cdot 53 + 3 \cdot 12 + 2 \cdot 27 + 1 \cdot 21 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 22 + 4 \cdot 18 = 320\text{од.} \blacktriangleleft$$

3. Метод апроксимації Фоґеля

При визначенні опорного плану транспортної задачі методом апроксимації Фоґеля на кожній ітерації у всіх стовпцях і всіх рядках знаходять різницю між двома записаними в них мінімальними вартостями перевезень. Ці значення записують у спеціально виділені для цього рядки і стовпці в таблиці умов задачі. Серед знайдених різниць вибирають мінімальну. У рядку (стовпці), якому відповідає ця різниця, знаходять найменшу вартість перевезення і цю клітинку заповнюють на даній ітерації.

Якщо мінімальна вартість перевезень є однаковою для декількох клітин даного рядка (стовпця), то заповнювати таблицю починають з тієї клітинки, яка розміщена у стовпці (рядку), що відповідає найбільшій різниці між двома найменшими вартостями, які є в даному стовпці (рядку).

4. Метод подвійної переваги

Якщо таблиця вартостей має значні розміри, то перебір всіх елементів таблиці є громіздким. У цьому випадку зручно застосовувати метод подвійної переваги. У кожному стовпці відзначаємо знаком (v) клітинку з найменшою вартістю. Якщо таких клітинок у стовпці декілька, знак (v) ставлять у кожній з них. Те саме робимо у кожному рядку. В результаті деякі клітинки будуть мати подвійну позначку (vv). Це вказує на те, що в таких клітинках є мінімальна вартість як по рядку, так і по стовпцю. Записуємо в такі клітинки максимально можливі об'єми перевезень, виключаючи кожен раз із розгляду відповідні рядки чи стовпці. Далі розподіляємо перевезення по клітинках, поміченими одним знаком (v). У незаповненій частині таблиці розміщуємо перевезення за найменшою вартістю.

§3.3. Критерій оптимальності опорного плану. Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі

Один із методів розв'язування транспортної задачі базується на аналізі двоїстої задачі. Розглянемо транспортну задачу (3.1)-(3.4)

$$L^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = \overline{1,m}),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = \overline{1,n}),$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n})$$

як двоїсту до деякої задачі лінійного програмування. Якщо кожному обмеженню (3.2) відповідає змінна $u_i \, (i = \overline{1,m})$, а кожному обмеженню (3.3) — змінна $v_j \, (j = \overline{1,n})$, то пряма задача має вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to max;$$

$$u_j + v_j \leq c_{ij} \ (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}).$$

Оскільки всі обмеження транспортної задачі є рівняннями, то така пара двоїстих задач є несиметричною і на знак змінних $u_i \, (i = \overline{1,m})$ та $v_j \, (j = \overline{1,n})$ жодних умов не накладається.

За першою теоремою двоїстості, якщо $X_{onm} = ||x^*_{ij}||$ є оптимальним планом двоїстої задачі, то $Y_{onm} = (u^*_1, ..., u^*_m, v^*_1, ..., v^*_n)$ є оптимальним планом прямої задачі і $L_{max} = L^*_{min}$ або $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i u^*_i + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j v^*_j = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x^*_{ij}$, де $x^*_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$. За другою теоремою двоїстості для того, щоб плани спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

1) $(u_i^* + v_j^* - c_{ij})x_{ij}^* = 0 \ (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$,

2) $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}^* - a_i\right) u_i^* = 0 \ (i = \overline{1,m})$,

$\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}^* - b_j\right) v_j^* = 0 \ (j = \overline{1,n})$. Умови 2 виконуються автоматично, оскільки всі обмеження транспортної задачі є рівняннями, а умова 1 виконується у таких випадках:

а) якщо $x_{ij} = 0$, то $u_i^* + v_j^* \leq c_{ij} \ (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$;

б) якщо $x_{ij} \neq 0$, то $u_i^* + v_j^* = c_{ij} \ (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$.

Наслідком другої теореми двоїстості для транспортної задачі є теорема. *Теорема.* Для того щоб деякий план $X = ||x_{ij}||_{m,n}$ транспортної задачі був опти-мальним, необхідно, щоб йому відповідала система з $m + n$ чисел $u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_n$, для якої виконуються умови

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \ (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}), \tag{1}$$

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{для тих пар індексів, для яких} x_{ij} > 0. \tag{2}$$

Отже, обмеження прямої задачі, які відповідають додатним компонентам оптимального плану двоїстої задачі, задовольняються як рівності, а ті, що відповідають компонентам, рівним нулю, — як нерівності.

Умови (1)-(2) називають **умовами потенціальності системи чисел** $u_i \ (i = \overline{1,m}), v_j \ (j = \overline{1,n})$,, а самі числа — **потенціалами** відповідних пунктів постачання A_i і призначення B_j . Зауважимо, що умова (1) виконується для всіх вільних клітинок, а (2) — для базових.

Метод розв'язування транспортної задачі, пов'язаний з побудовою системи потенціалів u_i, v_j , називається **методом потенціалів**.

Алгоритм методу потенціалів для невиродженого опорного плану

1) Знаходимо початковий опорний план транспортної задачі.

2) Для побудованого плану встановлюємо такі числа u_i , v_j , щоб $u_i + v_j = c_{ij}$ для тих пар індексів, які відповідають базисним клітинкам. Ці рівняння утворюють сумісну систему $n+m-1$ рівнянь з $n+m$ невідомими. Прийнявши одне з невідомих за нуль, решту можемо легко знайти .

3) Для небазисних (вільних) клітин обчислюємо значення

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j). \tag{3}$$

Якщо всі значення $\Delta_{ij} \geq 0$, то, відповідно до критерію оптимальності, побудований план є оптимальним.

4) Якщо серед чисел Δ_{ij} є від'ємні, то переходимо до нового опорного плану, значення лінійної функції для якого є меншим. Знову виконуємо пункти 2, 3, 4 доки не отримаємо оптимальний план.

Перехід до покращеного плану задачі (перерозподіл перевезень)

Серед вільних клітин попереднього плану вибираємо ту, яка має найменшу від'ємну характеристику Δ_{ij} . Нехай $\underset{i,j}{min} = \Delta_{kl}$. Якщо мінімум досягається для декількох пар індексів $(i; j)$, то вибираємо ту пару, якій відповідає найменша вартість перевезень. Цю клітинку вводимо в базис і саме з неї почи-наємо побудову так званого **циклу перерахунку** (перерахунок поставок). ***Означення 1.*** **Циклом** називається ламана лінія, вершинами якої є базисні клітинки, а ланками є перпендикулярні відрізки, що виходять із вершин під прямим кутом (одна по горизонталі, а друга по вертикалі).

Якщо ланки ламаної, яка утворює цикл, перетинаються, то точка самоперетину не є вершиною. ***Означення 2.*** Цикл, одна вершина якого лежить у вільній клітинці, а всі інші — у базових, називають **циклом перерахунку.**

Починаючи із клітинки $(k; l)$, вершини циклу перерахунку (а разом з ним і клітини) почергово позначають знаками "+" і "-". Серед клітин із знаком "-" вибираємо ту, величина перевезень x_{ij} в якій найменша. Нехай ця клітинка має індекси $(s; t)$ і їй відповідає величина перевезень $x_{st} = \theta$. Якщо для клітин із знаком "-" мінімум x_{ij} досягається для декількох пар індексів, то вибираємо ту клітинку, якій відповідає максимальна вартість перевезень c_{ij} . Клітинку з індексами $(s; t)$ виводимо з базису. Компоненти нового опорного плану визначаємо за формулами:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \theta & \text{для клітинок із знаком "-";} \\ x_{ij} + \theta & \text{для клітинок із знаком "+";} \\ x_{ij} & \text{для клітинок, які не містять вершин циклу} \end{cases}$$

Приклад 1. Розглянемо приклад з §3.2. Нехай початковий опорний план знайдено методом мінімального елемента. Застосуємо до цієї задачі метод потенціалів.

► Побудуємо для базових клітинок систему рівнянь (3.7):

$$\begin{array}{l} (1;2): \\ (1;5): \\ (2;1): \\ (2;3): \\ (2;4): \\ (3;4): \\ (3;5): \end{array} \begin{cases} u_1 + v_2 = 1, \\ u_1 + v_5 = 3, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_2 = 1, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_3 + v_2 = 2, \\ u_3 + v_2 = 4. \end{cases}$$

Ця система складається з 7 рівнянь $(m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7)$, а невідомих є 8. Покладемо $u_1 = 0$. Тоді $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $v_1 = 1$, $v_3 = 0$, $v_4 = 1$, $v_5 = 3$. Для того щоб опорний план був оптимальним, необхідно, щоб коефіцієнти $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$ для вільних клітинок. Знайдемо значення величин Δ_{ij} $\Delta_{11} =$

$c_{11} - (u_1 + v_1) = 3 - (0 + 1) = 2$, $\Delta_{13} = 3$, $\Delta_{14} = 3$, $\Delta_{22} = 1$, $\underline{\Delta_{25} = -1}$, $\Delta_{31} = 1$, $\Delta_{32} = 3$, $\Delta 33 = 1$ і запишемо їх у таблицю, позначаючи рамками.

Пункти постачання \ Пункти призначення	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси	u_i
A_1	**3** $\boxed{2}$	**1** **53**	**3** $\boxed{3}$	**4** $\boxed{3}$	**3** **12**	65	0
A_2	**2** **27**	**3** $\boxed{1}$	**1** **21**	**2** - **20**	**3** + $\boxed{-1}$	68	1
A_3	**3** $\boxed{1}$	**5** $\boxed{3}$	**2** $\boxed{1}$	**2** + **22**	**4** - **18**	40	1
Потреби	27	53	21	42	30	173	
v_j	1	1	0	1	3		

Перевіримо правильність побудованої системи. Для цього обчислюємо значення $u_i + v_j$ для всіх базисних (зайнятих) клітинок. Якщо ці величини дорівнюють відповідним значенням собівартості перевезень c_{ij} , то система побудована правильно; у протилежному випадку її треба або побудувати заново, або внести в неї зміни так, щоб виконувалась умова (2).

Оскільки $\Delta_{25} < 0$, то опорний план не є оптимальним. А тому необхідно зробити перерозподіл перевезень. Будуємо цикл перерахунку (1), починаючи з клітинки (2;5), де значення є від'ємним. Очевидно, що перевезення у клітинці (2;5) можна лише збільшити, тому вибираємо знак "+". У вершинах із знаком "-" вибираємо найменше базове значення: $min(20, 18) = 18$. Отже, $\theta = 18$. У додатних вершинах циклу додаємо число 18, а у від'ємних — віднімаємо. Результат обчислень зображено на 2.

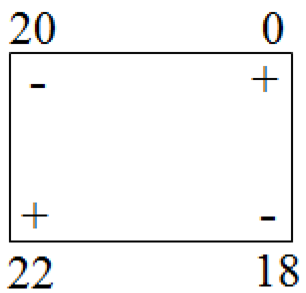

Рис. 1

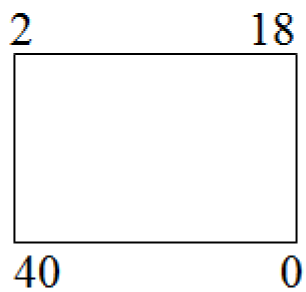

Рис. 2

У результаті перерозподілу θ отримано новий невироджений опорний план, який має вигляд:

Перевіримо отриманий план на оптимальність. Для цього знову знайдемо потенціали u_i та v_j , записавши систему рівнянь (2) для базових клітин:

Пункти постачання \ Пункти призначення	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i
A_1	3	1 53	3	4	3 12	0
A_2	2 27	3	1 21	2 2	3 18	0
A_3	3	5	2	2 40	4	0
v_j	2	1	1	2	3	

$$
\begin{array}{r}
(1;2): \\
(1;5): \\
(2;1): \\
(2;3): \\
(2;4): \\
(2;5): \\
(3;4):
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
u_1 + v_2 = 1, \\
u_1 + v_5 = 3, \\
u_2 + v_1 = 2, \\
u_2 + v_3 = 1, \\
u_2 + v_4 = 2, \\
u_3 + v_5 = 3, \\
u_3 + v_4 = 2.
\end{array}
\right.
$$