

Вариант 7

1. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

$$\text{а) } (2\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+3\vec{b}), \quad \text{б) } |(2\vec{a}-\vec{b}) \times (\vec{a}+3\vec{b})|,$$

где $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a} \wedge \vec{b}=2\pi/3$.

$$\begin{aligned} \text{а) } (2\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+3\vec{b}) &= 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} - 3 \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} = 2 \cdot \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 6 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} - 3 \cdot \vec{b}^2 = \\ &= 2 \cdot \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 6 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} - 3 \cdot \vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 + 5 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} - 3 \cdot \vec{b}^2 = 2 \cdot |\vec{a}|^2 + 5 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) - 3 \cdot |\vec{b}|^2 = \\ &= 2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - 3 \cdot 1^2 = 32 + 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } |(2\vec{a}-\vec{b}) \times (\vec{a}+3\vec{b})| &= |2 \cdot \vec{a} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{a} + 6 \cdot \vec{a} \times \vec{b} - 3 \cdot \vec{b} \times \vec{b}| = 2 \cdot 0 + \vec{a} \times \vec{b} + 6 \cdot \vec{a} \times \vec{b} - 3 \cdot 0 = \\ &= |7 \cdot \vec{a} \times \vec{b}| = 7 \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = 7 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. Найти координаты точки М, равноудаленной от точек А(-2;0;3) и В(3;-3;2), если точка М лежит на оси Ох.

Если точка М лежит на оси Ох, значит она будет иметь координаты:

$$M(x; 0; 0).$$

Расстояние между двумя точками вычисляется по формуле:

$$|d| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|AM| = \sqrt{(-2-x)^2 + (0-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{(-2-x)^2 + 9}$$

$$|BM| = \sqrt{(3-x)^2 + (-3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + 13}$$

Поскольку точка М равноудаленная от А и В, получаем:

$$|AM| = |BM|$$

$$\sqrt{(-2-x)^2 + 9} = \sqrt{(3-x)^2 + 13}$$

$$(-2-x)^2 + 9 = (3-x)^2 + 13$$

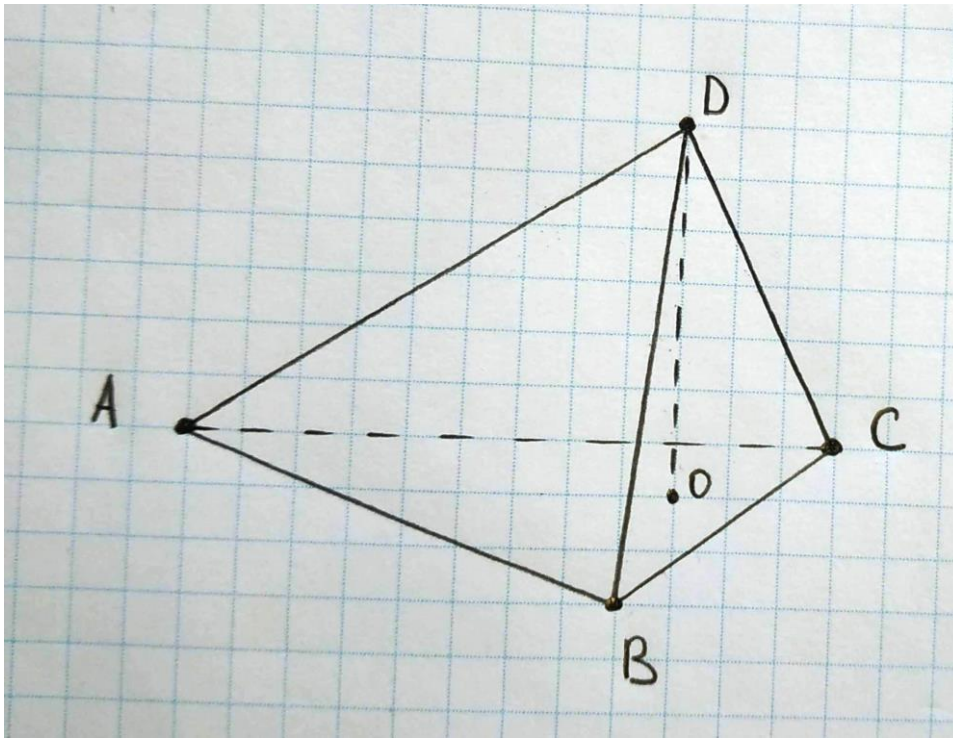
$$4 + 4x + x^2 + 9 = 9 - 6x + x^2 + 13$$

$$10x = 9$$

$$x = 0,9$$

Таким образом М(0,9; 0; 0).

3. Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани ABC, в) косинус угла между ребрами АВ и АС, г) уравнение прямой АВ, д) уравнение плоскости ABC, если А(4;5;-3), В(6;5;-4), С(3;2;0), D(6;3;-3).



а) Объем пирамиды найдем по формуле:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

$S_{\text{осн}}$ - площадь основания,

H - высота пирамиды

$S_{\text{осн}} = S_{ABC} = 4,19$ (найдена в пункте в)

Высоту H найдем как расстояние между точкой D и плоскостью ABC .

Если задано уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то расстояние от точки $M(M_x, M_y, M_z)$ до плоскости можно найти, используя следующую формулу:

$$d = \frac{|A \cdot M_x + B \cdot M_y + C \cdot M_z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Уравнение плоскости ABC найдено в пункте д:

$$-3x - 5y - 6z + 19 = 0$$

$$d = \frac{|(-3) \cdot 6 + (-5) \cdot 3 + (-6) \cdot (-3) + 19|}{\sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (-6)^2}} = \frac{|-18 - 15 + 18 + 19|}{\sqrt{9 + 25 + 36}} = \frac{4}{\sqrt{70}} \approx 0,48$$

$$H = 0,48$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 4,19 \cdot 0,48 = 0,67$$

б) Площадь грани ABC найдем, как площадь треугольника за двумя сторонами и углом между ними:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

Стороны АВ и АС, а также косинус угла между ними найдены в пункте в).

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,26} \approx 0,86$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{5} \cdot \sqrt{19} \cdot 0,86 \approx 4,19$$

в) Косинус угла можно найти, используя теорему косинусов для треугольника ABC:

$$\cos \alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$$

Найдем длины сторон треугольника ABC, используя формулу:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(4 - 6)^2 + (5 - 5)^2 + (-3 + 4)^2} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(4 - 3)^2 + (5 - 2)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{19}$$

$$BC = \sqrt{(6 - 3)^2 + (5 - 2)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{34}$$

$$\cos \alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{5 + 19 - 34}{2\sqrt{95}} = -\frac{5}{\sqrt{95}} \approx -0,51$$

г) Воспользуемся формулой канонического уравнения прямой:

$$\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a} = \frac{z - z_a}{z_b - z_a}$$

Так как: $y_b - y_a = 0$, то уравнение прямой в каноническом виде записать нельзя.

Воспользуемся формулой параметрического уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = lt + x_1 \\ y = mt + y_1 \\ z = nt + z_1 \end{cases}$$

где:

$\{l; m; n\}$ - направляющий вектор прямой, в качестве которого можно взять вектор $\overline{AB}$;

(x_1, y_1, z_1) - координаты точки лежащей на прямой, в качестве которых можно взять координаты точки А.

$$\overline{AB} = \{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\} = \{6 - 4; 5 - 5; -4 - (-3)\} = \{2; 0; -1\}$$

В итоге получено параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = 5 \\ z = -t - 3 \end{cases}$$

д) Для составления уравнения плоскости используем формулу:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

Подставим данные и упростим выражение:

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 5 & z - (-3) \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|x - 4| \cdot 0 \cdot 3 - (-1) \cdot (-3) - |y - 5| \cdot 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) + |z - (-3)| \cdot 2 \cdot (-3) - 0 \cdot (-1) = 0$$

$$(-3)|x - 4| + (-5)|y - 5| + (-6)|z - (-3)| = 0$$

$$(-3)|x - 4| + (-5)|y - 5| + (-6)|z - (-3)| = 0$$

$$-3x - 5y - 6z + 19 = 0$$

4. Показать, что векторы **a**, **b**, **c**, образуют базис. Найти разложение вектора **d** по этому базису, если **a** = (2;1;0), **b** = (1;0;1), **c** = (4;2;1), **d** = (3;1;3).

Для разложения вектора по базису запишем векторное уравнение:

$$x_1 \bar{a} + x_2 \bar{b} + x_3 \bar{c} = \bar{0}$$

Перепишем векторное уравнение в матричном виде и решим его методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1-ую строку делим на 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

от 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2-ую строку делим на -0.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

от 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 0.5; от 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

от 1 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Данная система векторов образует базис (линейно независимая система векторов), так как все $x_i = 0$.

Для разложения вектора по базису запишем векторное уравнение:

$$x_1 \bar{a} + x_2 \bar{b} + x_3 \bar{c} = \bar{d}$$

Перепишем векторное уравнение в матричном виде и решим его методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

1-ую строку делим на 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 2 & 1,5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

от 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 2 & 1,5 \\ 0 & -0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

2-ую строку делим на -0.5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 2 & 1,5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

от 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 0.5; от 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

от 1 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\bar{d} = -3\bar{a} + \bar{b} + 2\bar{c}$$

5. Определить при каких значениях a и b две прямые
 $(a-1)x-2y-1=0$ и $6x-4y+b=0$
а) пересекаются; **б)** параллельны; **в)** совпадают.

а) Две прямые пересекаются, тогда и только тогда, когда их коэффициенты при переменных НЕ пропорциональны, то есть НЕ существует такого значения «лямбда», чтобы выполнялись равенства:

$$A_2 = \lambda A_1$$

$$B_2 = \lambda B_1$$

Для нашего случая:

$$\begin{cases} 6 = \lambda(a-1) \\ -4 = \lambda(-2) \end{cases}$$

Находим: $\lambda = 2$

$$a = \frac{6}{\lambda} + 1 = \frac{6}{2} + 1 = 4$$

То есть, чтобы система уравнений не имела решений, нужно чтобы:

$$a \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$$

Число b может быть любым:

$$b \in (-\infty; +\infty)$$

б) Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их коэффициенты при переменных пропорциональны: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, но $C_2 \neq \lambda C_1$.

$$\begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \\ C_2 \neq \lambda C_1 \end{cases}$$

Для нашего случая:

$$\begin{cases} 6 = \lambda(a-1) \\ -4 = \lambda(-2) \\ b \neq \lambda(-1) \end{cases}$$

Находим: $\lambda = 2$

$$a = \frac{6}{\lambda} + 1 = \frac{6}{2} + 1 = 4$$

$$b \neq (-1) \cdot 2 = -2$$

$$b \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$$

в) Две прямые совпадают, тогда и только тогда, когда их соответствующие коэффициенты пропорциональны, то есть, существует такое число «лямбда», что выполняются равенства:

$$\begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \\ C_2 = \lambda C_1 \end{cases}$$

Для нашего случая:

$$\begin{cases} 6 = \lambda(a-1) \\ -4 = \lambda(-2) \\ b = \lambda(-1) \end{cases}$$

Находим: $\lambda = 2$

$$a = \frac{6}{\lambda} + 1 = \frac{6}{2} + 1 = 4$$

$$b = (-1) \cdot 2 = -2$$

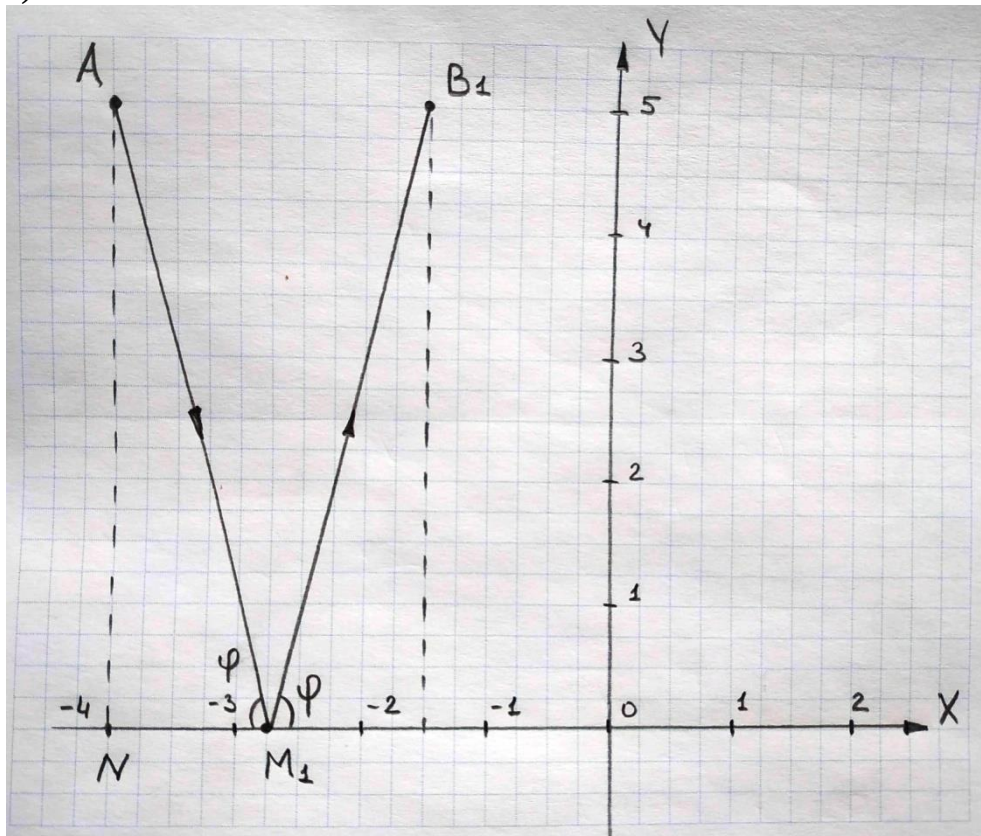
6. Из точки $A(-4;5)$ выходит луч света под углом $\varphi = \arctg 4$ к оси Ox и отражается от нее. Написать уравнения падающего и отраженного лучей. Сделать чертеж.

В данной задаче возможно два варианта:

- 1) Луч падает в положительном направлении оси Ox
- 2) Луч падает в отрицательном направлении оси Ox

Рассмотрим каждый из них.

1)



Точка $M_1(x; 0)$ – точка пересечения луча с осью OX . Необходимо найти ее координаты.

Опустим с точки A перпендикуляр на ось OX . Получился прямоугольный треугольник AM_1N .

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{AN}{M_1N} \Rightarrow \phi = \operatorname{arctg} \frac{AN}{M_1N}$$

$$\phi = \operatorname{arctg} 4$$

$$\operatorname{arctg} \frac{AN}{M_1N} = \operatorname{arctg} 4$$

$$\frac{AN}{M_1N} = 4$$

$$AN = 5$$

$$M_1N = \frac{AN}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Найдем координату x точки M_1 :

$$x = -4 + 1,25 = -2,75$$

$$M_1(-2,75; 0)$$

Найдем координаты точки B_1 .

$$x_{B_1} = -2,75 + 1,25 = -1,5$$

$$y_{B_1} = 5$$

$$B_1(-1,5; 5)$$

Воспользуемся формулой канонического уравнения прямой:

$$\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a}$$

$$\frac{x - (-4)}{-2,75 - (-4)} = \frac{y - 5}{0 - 5}$$

$$\frac{x + 4}{1,25} = \frac{y - 5}{-5}$$

Из уравнения прямой в каноническом виде получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

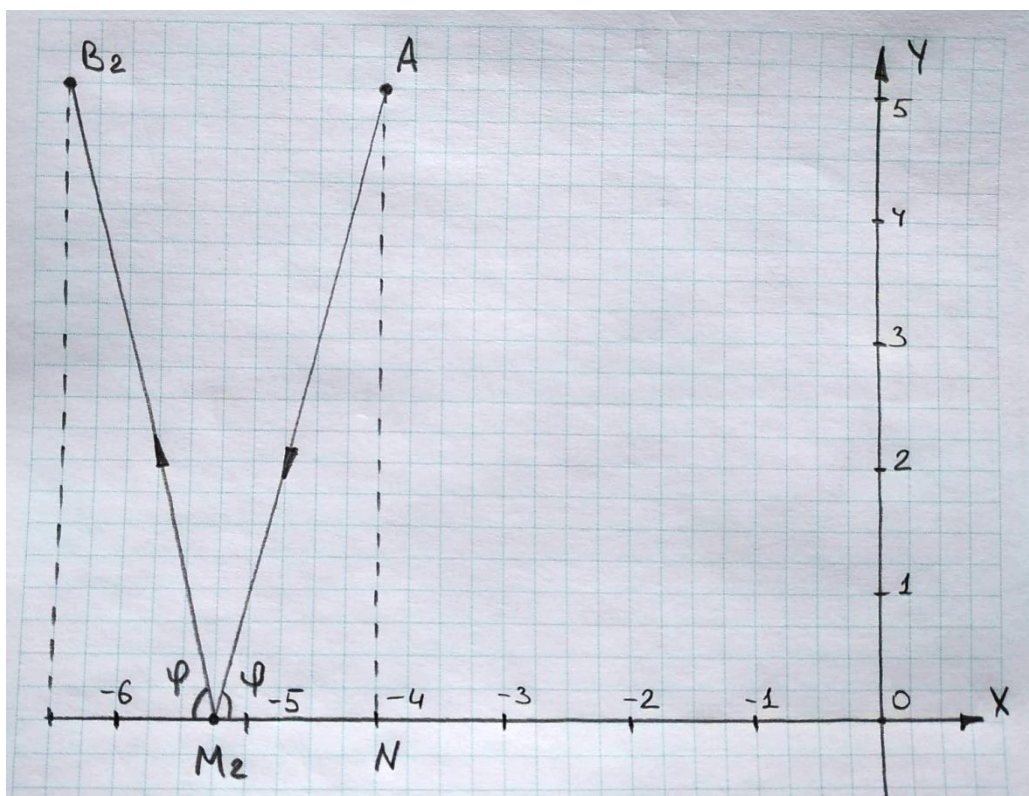
$$y = -4x - 11 \text{ - уравнение падающего луча}$$

$$\frac{x - (-2,75)}{-1,5 - (-2,75)} = \frac{y - 0}{5 - 0}$$

$$\frac{x + 2,75}{1,25} = \frac{y}{5}$$

Из уравнения прямой в каноническом виде получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = 4x + 11 \text{ - уравнение отраженного луча}$$



Точка $M_2(x; 0)$ – точка пересечения луча с осью OX . Необходимо найти ее координаты.

Опустим с точки A перпендикуляр на ось OX . Получился прямоугольный треугольник AM_2N .

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{AN}{M_2N} \Rightarrow \phi = \operatorname{arctg} \frac{AN}{M_2N}$$

$$\phi = \operatorname{arctg} 4$$

$$\operatorname{arctg} \frac{AN}{M_2N} = \operatorname{arctg} 4$$

$$\frac{AN}{M_2N} = 4$$

$$AN = 5$$

$$M_2N = \frac{AN}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Найдем координату x точки M_2 :

$$x = -4 - 1,25 = -5,25$$

$$M_1(-5,25; 0)$$

Найдем координаты точки B_2 .

$$x_{B_2} = -5,25 - 1,25 = -6,5$$

$$y_{B_2} = 5$$

$$B_2(-6,5; 5)$$

Воспользуемся формулой канонического уравнения прямой:

$$\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a}$$

$$\frac{x - (-4)}{-5,25 - (-4)} = \frac{y - 5}{0 - 5}$$

$$\frac{x + 4}{-1,25} = \frac{y - 5}{-5}$$

Из уравнения прямой в каноническом виде получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$y = 4x + 21$ - уравнение падающего луча

$$\frac{x - (-6,5)}{-5,25 - (-6,5)} = \frac{y - 0}{5 - 0}$$

$$\frac{x + 6,5}{1,25} = \frac{y - 5}{-5}$$

Из уравнения прямой в каноническом виде получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$y = -4x - 21$ - уравнение отраженного луча

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x + 3}{-1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{-3} \quad \text{и} \quad \frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z}{-3}.$$

Найдем координаты двух точек, которые лежат на первой прямой:

$M_1(-3; y_1; z_1)$

$$\frac{y_1 - 2}{2} = \frac{-3 + 3}{-1} \Rightarrow y_1 = 2$$

$$\frac{z_1 - 1}{-3} = \frac{-3 + 3}{-1} \Rightarrow z_1 = 1$$

$M_1(-3; 2; 1)$

$M_2(0; y_2; z_2)$

$$\frac{y_2 - 2}{2} = \frac{0 + 3}{-1} \Rightarrow y_2 = -4$$

$$\frac{z_2 - 1}{-3} = \frac{0 + 3}{-1} \Rightarrow z_2 = 10$$

$M_2(0; -4; 10)$

Найдем координаты точки M_3 , которая лежит на второй прямой:

$M_3(1; y_3; z_3)$

$$\frac{y_3 + 2}{2} = \frac{1 - 1}{-1} \Rightarrow y_3 = -2$$

$$\frac{z_3}{-3} = \frac{1-1}{-1} \Rightarrow z_3 = 0$$

$$M_3(0; -2; 0)$$

Найдем уравнение плоскости, проходящей через три точки М1, М2 и М3:

$$M_1(-3; 2; 1)$$

$$M_2(0; -4; 10)$$

$$M_3(0; -2; 0)$$

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0$$

Подставим данные и упростим выражение:

$$\begin{vmatrix} x-(-3) & y-2 & z-1 \\ 0-(-3) & (-4)-2 & 10-1 \\ 0-(-3) & (-2)-2 & 0-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-(-3) & y-2 & z-1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|x-(-3)| \cdot |-6 \cdot (-1) - 9 \cdot (-4)| - |y-2| \cdot |3 \cdot (-1) - 9 \cdot 3| + |z-1| \cdot |3 \cdot (-4) - (-6) \cdot 3| = 0$$

$$42|x-(-3)| + 30|y-2| + 6|z-1| = 0$$

$$42x + 30y + 6z + 60 = 0$$

$$7x + 5y + z + 10 = 0$$